1. *a) Legyenek ${}_RX_S$ és ${}_RY_T$ bimodulusok. Lássuk be, hogy* $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ *egy S-T-bimodulus, azaz bal S-modulus, jobb T-modulus, és a bal és jobb oldali gyűrűhatás felcserélhető!*

b) Legyenek ${}_SX_R$ és ${}_TY_R$ bimodulusok. Lássuk be, hogy ekkor $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ *egy T-S-bimodulus!*

Megoldás: a) Legyenek $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_R(X,Y)$. Definiáljuk az S-szorzást az $x(s\varphi) := (xs)\varphi$, a T-szorzást pedig az $y(\varphi t) := (y\varphi)t$ szabállyal. Az $s\varphi$ és φt leképezések is R-homomorfizmusok:

$$(x+x')(s\varphi) = ((x+x')s)\varphi = (xs+x's)\varphi = (xs)\varphi + (x's)\varphi = x(s\varphi) + x'(s\varphi),$$

$$(rx)(s\varphi) = ((rx)s)\varphi = (r(xs))\varphi = r((xs)\varphi) = r(x(s\varphi)),$$

$$(x+x')(\varphi t) = ((x+x')\varphi)t = (x\varphi + x'\varphi)t = (x\varphi)t + (x'\varphi)t = x(\varphi t) + x'(\varphi t),$$

$$(rx)(\varphi t) = ((rx)\varphi)t = (r(x\varphi))t = r((x\varphi)t) = r(x(\varphi t)).$$

Belátjuk még, hogy ezzel a definícióval $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ S-T-bimodulus. Az összeadással kapcsolatos axiómák teljesülése nyilvánvaló, mert a definícióban minden felcserélhető az összeadással, itt már csak a szorzásról szólókat ellenőrizzük.

$$x((ss')\varphi) = (x(ss'))\varphi = ((xs)s')\varphi = (xs)(s'\varphi) = x(s(s'\varphi)),$$

$$x(\varphi(tt')) = (x\varphi)(tt') = ((x\varphi)t)t' = (x(\varphi t))t' = x((\varphi t)t'),$$

$$x((s\varphi)t) = (x(s\varphi))t = ((xs)\varphi)t = (xs)(\varphi t) = x(s(\varphi t)).$$

b) Legyenek $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_R(X,Y)$. Definiáljuk az S-szorzást az $x(\varphi s) := (sx)\varphi$, a T-szorzást pedig az $y(t\varphi) := t(y\varphi)$ szabállyal. A φs és $t\varphi$ leképezések is R-homomorfizmusok:

$$(x+x')(\varphi s) = (s(x+x'))\varphi = (sx+sx')\varphi = (sx)\varphi + (sx')\varphi = x(\varphi s) + x'(\varphi s),$$

$$(xr)(\varphi s) = (s(xr))\varphi = ((sx)r)\varphi = ((sx)\varphi)r = (x(\varphi s))r,$$

$$(x+x')(t\varphi) = t((x+x')\varphi) = t(x\varphi + x'\varphi) = t(x\varphi) + t(x'\varphi) = x(t\varphi) + x'(t\varphi),$$

$$(xr)(t\varphi) = t((xr)\varphi) = t((x\varphi)r) = (t(x\varphi))r = (x(t\varphi))r.$$

Belátjuk még, hogy ezzel a definícióval $\mathrm{Hom}_R(X,Y)$ T-S-bimodulus. Itt is csak a szorzásról szóló axiómákat ellenőrizzük.

$$x(\varphi(ss')) = ((ss')x)\varphi = (s(s'x))\varphi = (s'x)(\varphi s) = x((\varphi s)s'),$$

$$x((tt')\varphi) = (tt')(x\varphi) = t(t'(x\varphi)) = t(x(t'\varphi)) = x(t(t'\varphi)),$$

$$x(t(\varphi s)) = t(x(\varphi s)) = t((sx)\varphi) = (sx)(t\varphi) = x((t\varphi)s)).$$

2. *Bizonyítsuk be, hogy a kategóriaelméleti szorzat és koszorzat izomorfizmus erejéig egyértelmű!*

M szorzat:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi_i"] & M_i \\ \forall U \arrow[u, dashed, "\exists!\varphi"] \arrow[ur, "\alpha_i"'] & \end{tikzcd}$$

N koszorzat:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[d, dashed, "\exists!\varphi"'] & M_i \arrow[l, "\iota_i"'] \arrow[dl, "\alpha_i"] \\ \forall U & \end{tikzcd}$$

Megoldás: Ha M és M' is szorzata az M_i modulusoknak (π_i és π'_i homomorfizmusokkal), akkor a diagram szerint van $\varphi : M' \to M$ és $\psi : M \to M'$, amelyekre $\varphi\pi_i = \pi'_i$ és $\psi\pi'_i = \pi_i$ minden i-re. De akkor M-et téve U helyébe is a fönti diagramban (és π_i-t α_i helyére), a diagramot $\psi\varphi$-vel és id_M-mel is kommutatívvá lehet tenni. Az egyértelműség miatt ebből $\psi\varphi = id_M$ következik, és ugyanígy jön ki, hogy $\varphi\psi = id_{M'}$, tehát $M \cong M'$.

A koszorzatra ugyanez működik, csak fordított irányú homomorfizmusokkal. Ha N és N' is koszorzata az M_i-knek ι_i és ι'_i morfizmusokkal, akkor van olyan $\varphi : N \to N'$ és $\psi : N' \to N$, amelyekre $\iota'_i = \iota_i\varphi$ és $\iota_i = \iota'_i\psi$, amiből $\iota_i = \iota_i\varphi\psi$. Tehát ha U helyébe is N-et és α_i-k helyébe ι_i-ket írunk, akkor $\varphi\psi$ és id_N is kommutatívvá teszi a diagramot, ezért $\varphi\psi = \mathrm{id}_N$, és a diagramot két N'-vel felrajzolva azt kapjuk, hogy $\psi\varphi = \mathrm{id}_{N'}$. Tehát $N \cong N'$.

3. *Bizonyítsuk be, hogy az U_i modulusok kategóriaelméleti szorzata $\prod U_i$, koszorzata pedig $\oplus U_i$.*

Megoldás: Legyen $M = \prod\limits_{i\in I} M_i$, π_i az i. komponensre való vetítés, U pedig egy tetszőleges modulus, $\alpha_i : U \to M_i$ homomorfizmusokkal. Ekkor a $\varphi : U \to M$, $u\varphi = (\ldots, u\alpha_i, \ldots)$ leképezés modulus-homomorfizmus, és $\varphi\pi_i = \alpha_i$. Továbbá, φ egyértelmű is, mivel $(u\varphi)\pi_i = u\alpha_i$-nek kell teljesülnie, vagyis $u\varphi$ i. komponense csak $u\alpha_i$ lehet.

Legyen $N = \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$, ι_i az M_i-nek az N-be való természetes beágyazása, U pedig egy tetszőleges modulus, $\alpha_i : M_i \to U$ homomorfizmusokkal. Ekkor a $\varphi : N \to U$, $\big(\sum\limits_{i\in I} m_i\big)\varphi = \sum\limits_{i\in I} m_i\alpha_i$ értelmes, mert az m_i-k közül csak véges sok nem 0, és nyilvánvalóan művelettartó, továbbá $\iota_i\varphi = \alpha_i$ minden i-re. Itt is egyértelmű a φ homomorfizmus, ugyanis az m_i-k képe a diagram kommutativitása miatt adva van, és ezek már kigenerálják a teljes direkt összeget.

4. *Mi a $\mathbb{Z}$ önmagával vett koszorzata, ha az Abel-csoportok, illetve a csoportok kategóriájában nézzük? És $\mathbb{Z}_2$ önmagával vett koszorzata?*

Megoldás: Az Abel-csoportok kategóriájában az 1. feladat szerint $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. A csoportok kategóriájában inkább multiplikatív műveletet szoktunk használni, így $\mathbb{Z}$ helyett vegyük a C_∞ csoportot. Itt a 2 elemmel generált szabadcsoport lesz a koszorzat. Legyen ugyanis az F csoport az x, y elemekkel szabadon generált csoport. $M_1 =< x >$, és $M_2 =< y >$ mindketten végtelen ciklikus csoportok, és a természetes beágyazásuk F-be a ι_1 és ι_2. Tetszőleges U csoportra és $\alpha_i : M_i \to U$ homomorfizmusokra van olyan egyértelmű $\varphi : F \to U$ homomorfizmus, ami a szabad generátorokon megadott $x \mapsto x\alpha_1$ és $y \mapsto y\alpha_2$ leképezést kiterjeszti. Mivel $\iota_i\varphi = \alpha_i$ teljesül az M_i generátorelemén, x-en, illetve y-on, a teljes M_i csoporton is teljesül $i = 1, 2$-re. Vagyis F valóban a végtelen ciklikus csoport koszorzata önmagával.

$\mathbb{Z}_2$ koszorzata önmagával az Abel-csoportok kategóriájában nyilván $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, azaz a Klein-csoport, a csoportok kategóriájában pedig két másodrendű ciklikus csoport szabad szorzata, azaz az $\langle x, y \,|\, x^2 = y^2 = 1 \rangle$ definiáló relációkkal megadott csoport (mellesleg ez izomorf azzal a csoporttal, amit a síkon két olyan origón átmenő egyenesre való tükrözés generál a sík egybevágóság-csoportjában, amelyeknek a szöge 2π-nek egy irracionális többszöröse).

5. *Bizonyítsuk be, hogy*

a) ha α és β epimorfizmus, akkor $\alpha\beta$ is az;
b) ha α és β monomorfizmus, akkor $\alpha\beta$ is az;
c) ha $\alpha\beta$ epimorfizmus, akkor β is az;
d) ha $\alpha\beta$ monomorfizmus, akkor α is az!

Megoldás: a) $(\alpha\beta)\gamma = (\alpha\beta)\delta \Rightarrow \alpha(\beta\gamma) = \alpha(\beta\delta)$, és α epi. $\Rightarrow \beta\gamma = \beta\delta$, és β epi. $\Rightarrow \gamma = \delta$.

b) $\gamma(\alpha\beta) = \delta(\alpha\beta) \Rightarrow (\gamma\alpha)\beta = (\delta\alpha)\beta$, és β mono. $\Rightarrow \gamma\alpha = \delta\alpha$, és α mono. $\Rightarrow \gamma = \delta$.

c) $\beta\gamma = \beta\delta \Rightarrow \alpha\beta\gamma = \alpha\beta\delta$, és $\alpha\beta$ epi. $\Rightarrow \gamma = \delta$.

d) $\gamma\alpha = \delta\alpha \Rightarrow \gamma\alpha\beta = \delta\alpha\beta$, és $\alpha\beta$ mono. $\Rightarrow \gamma = \delta$.

6. *Legyen $\mathcal{K}$ az a kategória, amelynek egyetlen a objektuma van, és $S = \mathrm{Hom}(a, a)$ egy véges, egységelemes félcsoport, amelyben $1 := \mathrm{id}_a$. Melyek lesznek $\mathrm{Hom}(a, a)$-ban az epimorfizmusok és a monomorfizmusok?*

Megoldás: Egy $b \in S$ elem akkor és csak akkor epimorfizmus, ha balról egyszerűsíteni lehet vele, azaz ha $bx = by \Rightarrow x = y$. Ez viszont azt jelenti, hogy a b-vel való balról szorzás injektív leképezés S-ből S-be. Mivel feltettük, hogy S véges, ebből a leképezés szürjektivitása is következik, ezért a leképezés permutációként hat S-en, következésképpen valamilyen $n > 0$-ra $b^n = 1$, és így b invertálható. Ugyanígy kijön, hogy ha b monomorfizmus, akkor b invertálható (csak ott a jobbról szorzás injektivitását használjuk). Fordítva, minden invertálható elemmel egyszerűsíteni lehet (bármelyik oldalról): $bx = by \Rightarrow x = b^{-1}bx = b^{-1}by = y$, és ugyanígy a jobb oldalon, így ezek epimorfizmusok és monomorfizmusok is. Összefoglalva: $b \in S$-re ekvivalens, hogy

(i) b epimorfizmus;
(ii) b monomorfizmus;
(iii) b invertálható;
(iv) $\exists n > 0\ b^n = 1$.

Hf1. *Legyen K test és $R = K^{n\times n}$ a K fölötti $n \times n$-es mátrixok algebrája. Bizonyítsuk be, hogy a $H := \mathrm{Hom}_K(R, K)$ vektortér egyúttal R-R-bimodulus, továbbá, ha τ a mátrixokhoz a nyomukat rendelő leképezés, akkor $\tau \in H$, és $a\tau = \tau a$ minden $a \in R$-re!*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy az egységelemes gyűrűk kategóriájában a $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ beágyazás epimorfizmus, bár nem szürjektív!*