1. *Bizonyítsuk be, hogy projektív modulusok direkt összege projektív, és injektív modulusok direkt szorzata injektív! (Használjuk a kategóriaelméleti koszorzat és szorzat fogalmát!)*

Megoldás: Legyenek M_i-k projektívek, $\alpha : X \to Y$ epimorfizmus, és $\beta : \oplus M_i \to Y$. Ekkor M_i projektivitásából következik, hogy van olyan $\psi_i : M_i \to X$, amelyre $\psi_i\alpha = \iota_i\beta$ minden i-re. Ekkor viszont a koszorzat definíciója miatt van olyan $\varepsilon : \oplus M_i \to X$, amelyre $\psi_i = \iota_i\varepsilon$ minden i-re. Következésképpen $\iota_i\beta = \psi_i\alpha = \iota_i\varepsilon\alpha$, így a direkt összeg (koszorzat) definíciójában az egyértelműségből következik, hogy $\beta = \varepsilon\alpha$.

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[d, "\iota_i"] \arrow[ddl, dashed, "\psi_i"'] & \\
\oplus M_i \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, dashed, "\varepsilon"] & \\
X \arrow[r, two heads, "\alpha"'] & Y
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & Y \arrow[dl, dashed, "\varepsilon"] \arrow[ddl, dashed, "\psi_i"] \\
\prod M_i \arrow[d, "\pi_i"'] & \\
M_i &
\end{tikzcd}$$

Most legyenek M_i-k injektív modulusok, $\alpha : X \to Y$ monomorfizmus, és $\beta : X \to \prod M_i$. Ekkor az M_i injektivitása miatt van olyan $\psi_i : Y \to M_i$ homomorfizmus minden i-re, amelyre $\alpha\psi_i = \beta\pi_i$. Most a kategóriaelméleti szorzat definíciójából következik, hogy van olyan $\varepsilon : Y \to \prod M_i$, amelyre $\varepsilon\pi_i = \psi_i$ minden i-re. Következésképpen $\alpha\varepsilon\pi_i = \alpha\psi_i = \beta\pi_i$ minden i-re. Így a kategóriaelméleti szorzat definíciójában az egyértelműségből következik, hogy $\alpha\varepsilon = \beta$.

2. *Bizonyítsuk be, hogy minden vektortér projektív és injektív!*

Megoldás: A vektorterekre teljesül, hogy minden altérnek van direkt kiegészítője (a vektorterek féligegyszerűek). A P projektív modulusoknak abból a jellemzéséből, hogy minden $M \to P$ szürjektív homomorfizmus magja direkt összeadandó, következik, hogy minden vektortér projektív, és a Q injektív modulusoknak abból a jellemzéséből, hogy minden $Q \to M$ injektív homomorfizmus képe direkt összeadandó, következik, hogy minden vektortér injektív. Sőt általánosabban beláttuk, hogy féligegyszerű gyűrű fölött minden modulus projektív és injektív.

3. *Tekintsük a 2./6. feladat egyelemű $\mathcal{K} = \{\, a \,\}$ kategóriáját az $S = \mathrm{Hom}(a, a)$ félcsoporttal. Projektív-e, injektív-e az a objektum? Létezik-e az a és a objektumok szorzata?*

Megoldás: A 2./6. feladatban láttuk, hogy S-nek pontosan az invertálható elemei lesznek epimorfizmusok, illetve monomorfizmusok.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "\beta"] \arrow[dl, dashed, "\gamma"'] & \\
a \arrow[r, two heads, "\alpha"'] & a
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, tail, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & a \arrow[dl, dashed, "\gamma"] \\
a &
\end{tikzcd}$$

Így ezen az ábrán az α mindkét esetben invertálható eleme S-nek, ezért az első esetben $\gamma = \beta\alpha^{-1}$, a másodikban $\gamma = \alpha^{-1}\beta$ kielégíti a projektív, illetve injektív modulus definícióját. Tehát a projektív és injektív is.

Mivel a kategróriában egyetlen objektum van, ha létezik a és a szorzata, az csak a lehet két morfizmussal: $a \xleftarrow{\pi_1} a \xrightarrow{\pi_2} a$. Az $a \xleftarrow{\mathrm{id}} a \xrightarrow{\mathrm{id}} a$ leképezéseknek átvezethetőnek kell lennie az előzőn, azaz van olyan $\varphi \in S$, amelyre $\mathrm{id} = \varphi\pi_1$ és $\mathrm{id} = \varphi\pi_2$, tehát π_i epimorfizmus $i = 1, 2$-re (lásd az 5./c) feladatot), vagyis S-ben invertálhatók. Ha $|S| > 1$,

és $\beta \in S \setminus \{\pi_2\}$, akkor az $a \xleftarrow{\mathrm{id}} a \xrightarrow{\mathrm{id}} a$ leképezéseket a jobb oldal miatt csak $\gamma = \mathrm{id}$-del tudjuk átvezetni az $a \xleftarrow{\pi_1} a \xrightarrow{\pi_2} a$ leképezéseken ($\pi_1 = \gamma\pi_1 \Rightarrow \mathrm{id} = \pi_1\pi_1^{-1} = \gamma\pi_1\pi_1^{-1} = \gamma$), de erre $\gamma\pi_2 = \mathrm{id}\pi_2 \neq \beta$. Tehát csak akkor létezhet a szorzat, ha S egyelemű, azaz $S = \{\mathrm{id}\}$, és akkor a valóban az a és a szorzata az $a \xleftarrow{\mathrm{id}} a \xrightarrow{\mathrm{id}} a$ leképezéseket használva.

4. *Legyen $a \in R$, és tegyük fel, hogy az aR jobb R-modulus projektív. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az a elem jobb annullátora is felírható bR alakban valamely $b \in R$-re!*

Megoldás: A $\varphi : r \mapsto ar$ leképezés homomorfizmus R_R-ből aR-re. A φ magja, $\operatorname{Ker}\varphi = \{r \in R \mid ar = 0\}$, vagyis az a elem jobb annullátora. A φ homomorfizmus szürjektív, és aR-ről feltettük, hogy projektív, ezért $\operatorname{Ker}\varphi$ direkt összeadandója R_R-nek: $R_R = \operatorname{Ker}\varphi \oplus V$ valamely V részmodulusra. Az első komponensre való vetítés modulus-homomorfizmus, ami az R_R generátorelemét, 1-et a kép generátorelemébe képezi, tehát $\operatorname{Ker}\varphi$ is ciklikus modulus, azaz bR alakú.

5. *Bizonyítsuk be, hogy*

a) $\mathbb{Q}$ mint Abel-csoport nem projektív;

b) $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ nem projektív! (Útmutatás: Álljon a H részcsoport azokból az elemekből, amelyekre igaz, hogy tetszőleges n-re a komponensek véges sok kivétellel oszthatók 2^n-nel. Ekkor H kontinuum számosságú, de $H/2H$ megszámlálható, így H nem lehet szabad Abel-csoport.)*

Megoldás: a) Szabad Abel-csoportnak, azaz $\mathbb{Z}$-k direkt összegének semelyik nem nulla eleme nem korlátlanul osztható, mert $\mathbb{Z}$-ben $0 \neq n$ nem osztható $2n$-nel. Így projektív Abel-csoportban sincs korlátlanul osztható nem 0 elem, $\mathbb{Q}$ viszont osztható csoport.

b) A bizonyításban felhasználjuk azt a tételt, hogy szabad Abel-csoport minden részcsoportja szabad, így ha a $G = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ csoport projektív, akkor ő és minden részcsoportja, tehát a H részcsoport is szabad, azaz $\mathbb{Z}$-k direkt összege. H nyilván tartalmazza a $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$ részcsoportot, továbbá minden olyan elemet is, amelynek az n. komponense vagy 0, vagy 2^n minden n-re. Ez utóbbiból kontinuum sok van, így H csak kontinuum sok $\mathbb{Z}$ direkt összege lehet (Ha α végtelen számosság, akkor α darab $\mathbb{Z}$ direkt összege is α számosságú). Viszont akkor $H/2H$ kontinuum dimenziós $\mathbb{F}_2$ fölötti vektortér volna. De $2H + \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z} = H$ (egy H-beli h elemből kivonhatjuk azt a direkt összegbelit, amelyben h — véges sok — páratlan komponense szerepel, és a többi helyen 0, és így egy $2H$-belit kapunk), tehát $|H/2H| \leq \left|\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}\right|$, és az utóbbi megszámlálható. Ellentmondásra jutottunk a feltevésből, hogy G projektív.

6. *Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}_n$ injektív mint önmaga fölötti modulus (használhatjuk a Baer-kritériumot)!*

Megoldás: $\mathbb{Z}_n$ részmodulusai az n osztói által generált ciklikus modulusok, azaz $k\mathbb{Z}_n$, ahol $k \mid n$ (ugyanis ha k az I ideál legkisebb pozitív eleme, akkor az $n = kq + r$ maradékos osztásból következik, hogy $r \in I$, tehát $0 \leq r < k$ miatt $r = 0$, azaz $k|n$, és tetszőleges $a \in I$ elemre az $a = kq_1 + r_1$ maradékos osztásból $r_1 = 0$ következik, így k generálja I-t). Tehát a Baer-kritérium miatt elég a következő típusú diagramokkal foglalkozni.

$$\begin{tikzcd}
k\mathbb{Z}_n \arrow[r, tail, "\iota"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathbb{Z}_n \arrow[dl, dashed, "\exists\gamma"] \\
\mathbb{Z}_n &
\end{tikzcd}$$

ahol ι a természetes beágyazás: $k\iota = k$. Legyen $k\alpha = a \in \mathbb{Z}_n$. Ekkor $a\frac{n}{k} = k\alpha\frac{n}{k} = (k\frac{n}{k})\alpha = 0\alpha = 0$, ezért $k \mid a$, és így van olyan $b \in \mathbb{Z}_n$, amelyre $a = kb$. Mivel $\mathbb{Z}_n$ szabad modulus önmaga fölött, létezik olyan γ homomorfizmus, amelyre $1\gamma = b$, és így $k\iota\gamma = k\gamma = (1k)\gamma = (1\gamma)k = bk = a = k\alpha$. Tehát $\iota\gamma = \alpha$ a generátorelemen, és így az egész $k\mathbb{Z}_n$-en is.

Hf1. *Injektív-e $\mathbb{Z}_2$ mint $\mathbb{Z}_4$-modulus, illetve $\mathbb{Z}_6$-modulus?*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy egy P modulus akkor és csak akkor projektív, ha van olyan szabad F modulus, melyre $F \cong F \oplus P$. (Útmutatás: gondoljunk a végtelen direkt összegekre is!)*