1. *Legyen $A = K\Gamma/I$ az az algebra, amelynek reguláris jobbmodulusa $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$. Határozzuk meg az $\begin{smallmatrix}&1&\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$ modulus összes részmodulusát és az ezekkel vett faktorainak Loewy-diagramját!*

Megoldás: Az algebra gráfja Γ :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

és $A = K\Gamma/(\alpha\beta^2, \beta^3)$. Nevezzük el az $M = \begin{smallmatrix}&1&\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$ modulus báziselemeit b_1, c_1, b_2, c_2-nek, ahol $Me_1 = \langle b_1, c_1\rangle$, $Me_2 = \langle b_2, c_2\rangle$ úgy, hogy a modulus

$$\begin{tikzcd} & c_1 \arrow[d, dash, "\alpha"] & \\ b_1 \arrow[dr, dash, "\alpha"'] & c_2 \arrow[dl, dash, "\beta"] & \\ & b_2 & \end{tikzcd}$$

Legyen $U \leq M$. Először tegyük fel, hogy $Ue_1 \neq 0$. Ha U-ban van $u = \lambda b_1 + \mu c_1$ alakú elem, ahol $\mu \neq 0$, akkor $u\alpha = \lambda b_2 + \mu c_2$, és $u\alpha\beta = \mu b_2$ miatt $b_2, c_2 \in U$, tehát vagy $U = M$, vagy U háromdimenziós, és bázisa $\{\, \lambda b_1 + \mu c_1, c_2, b_2 \,\}$. Legyen ez U_μ. Ezeknek a modulusoknak a Loewy-diagramja $\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}$ (a Loewy-diagramhoz tartozó bázis a $\{\, \lambda b_1 + \mu c_1, \lambda b_2 + \mu c_2, b_2 \,\}$). Ha $Ue_1 \neq 0$, de csak λb_1 alakú elemeket tartalmaz, akkor $b_1 \in U$, és ebből $b_2 \in U$ is következik. Így Ue_2 vagy Me_2-vel egyezik meg, vagy egydimenziós, tehát a részmodulus vagy $\langle b_1, b_2, c_2\rangle = \begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$, vagy $\langle b_1, b_2\rangle = \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$. Ha $Ue_1 = 0$, és $U = Ue_2$-nek van $u = \lambda b_2 + \mu c_2$ alakú eleme $\mu \neq 0$-val, akkor $u\beta = \mu b_2 \in U$, így $b_2, c_2 \in U$, és $U = \langle c_2, b_2\rangle = \begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$. Ha ilyen elem sincs Ue_2-ben, de $U \neq 0$, akkor $U = \langle b_2\rangle$, és a Loewy-diagramja $\begin{smallmatrix}2\end{smallmatrix}$. Így a végtelen sok (de egymással izomorf) U_μ részmoduluson kívül, de a 0-t is beleszámítva 6 részmodulus van. A faktormodulusok Loewy-diagramjukkal felírva: 0, $\begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$, és maga M.

2. *Hány dimenziós az 3.b) feladatban megadott A algebra fölött a* $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix})$, *illetve a* $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix})$ *vektortér?*

Megoldás: Legyen $M = \begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$ és $N = \begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}$. Az M Loewy-diagramjának tetején levő számnak megfelelő generátorelemet csak a kétdimenziós Ne_2 altérbe képezhetjük, és van két ilyen független homomorfizmus: M-et $S(1)$-gyel lefaktorizálva, a $\begin{smallmatrix}2\\2\end{smallmatrix}$ modulust beágyazhatjuk N-be, illetve az $M/(\begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\end{smallmatrix}) \cong \begin{smallmatrix}2\end{smallmatrix}$ faktormodulust beágyazhatjuk N-be úgy, hogy a kép az N Loewy-diagramjának alján levő számnak megfelelő egydimenziós részmodulus (ez az N talpa, azaz az egyszerű részmodulusok generátuma). Így $\dim_K \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}&2&\\1&&2\\&2&\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1&&2\\&2&\end{smallmatrix}) = 2$.

N-nek nyilván nincs monomorfizmusa M-be (a dimenziók miatt ennek izomorfizmusnak kellene lennie), és könnyen látható, hogy N minden nem nulla részmodulusa tartalmazza az N talpát, $S(2)$-t, tehát a homomorfizmusok valójában $S(1) \oplus S(2)$-ből mennek. Ez viszont csak az M, szintén $S(1) \oplus S(2)$-vel izomorf talpába képződhet. A $\mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix}1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\end{smallmatrix})$ vektorteret generálják a $\pi_1\iota_1$ és $\pi_2\iota_2$ morfizmusok, tehát 2-dimenziós.

3. *A következők közül melyik definiál funktort a morfizmusokon való természetes hatással együtt?*

a) $G \mapsto G'$ *a csoportok kategóriájában;*

b) $G \mapsto Z(G)$ *a csoportok kategóriájában;*

c) $A \mapsto t(A)$ *az Abel-csoportok kategóriájában, ahol $t(A)$ az A torziórészcsoportja, azaz véges rendű elemeinek csoportja.*

Megoldás: a) Ha $\varphi : G \to H$ csoport-homomorfizmus, akkor

$$G'\varphi = \langle x^{-1}y^{-1}xy \,|\, x, y \in G\rangle\, \varphi = \langle (x\varphi)^{-1}(y\varphi)^{-1}(x\varphi)(y\varphi) \,|\, x, y \in G\rangle \leq H',$$

tehát a morfizmusokon definiálhatjuk a funktort úgy hogy φ képe $\varphi\,|_{G'}$, azaz a kommutátor-részcsoportra való megszorítás legyen. Így nyilván kovariáns funktort kapunk.

b) Az előző módszer itt nem működik, mivel a csoporthomomorfizmus a centrumot nem feltétlenül képezi a centrumba. És valóban nem lehet sem kovariáns sem kontravariáns funktort definiálni a morfizmusokon. Tekintsük például a $C_2 = \{\,1, a\,\}$ ciklikus csoportot és a $D_3 = \langle f, t\rangle$ diédercsoportot, ahol f az egyik forgatás és t az egyik tükrözés. Legyen továbbá $C_2 \xrightarrow{\alpha} D_3 \xrightarrow{\beta} C_2$, ahol $\alpha : a \mapsto t,\ \ \beta : f \mapsto 1,\ \ t \mapsto a$. Ekkor $\alpha\beta = \mathrm{id}_{C_2}$, tehát $F(\alpha\beta) = \mathrm{id}_{Z(C_2)} = \mathrm{id}_{C_2}$. Viszont $Z(D_3) = 1$, tehát α és β képe is csak a triviális homomorfizmus lehet, és így a képek szorzata (akár invariáns akár kovariáns lenne a funktor) csak az azonosan 1 homomorfizmus lehetne.

c) Az a) részhez hasonlóan itt is kovariáns funktort tudunk definiálni, mert a torzió-részcsoportot minden homomorfizmus torziórészcsoportba képezi.

4. *Bizonyítsuk be, hogy a* $\mathrm{Hom}_K(-, K)$ *funktor (K-dualitás) egzakt kontravariáns funktor* Mod-A-*ból* A-Mod-*ba!*

Megoldás: Egy egzakt sorozat képe egzakt, ha a K-vektorerek kategóriájában egzakt. Viszont K mint vektortér injektív, így ott $\mathrm{Hom}_K(-, K)$ egzakt funktor.

5. *Legyen A az a gráfalgebra, amelyre a reguláris modulus Loewy-diagramja*

$$A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\\&2&\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}3\\2\end{smallmatrix}.$$

Tekintsük a $0 \to \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}&2&\\1&&3\\&2&\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix} \to 1 \to 0$ *sorozatot, ahol mindegyik morfizmus a legnagyobb rangú olyan homomorfizmus (azaz a képe vektortérként maximális dimenziós), ami a Loewy-diagramokban használt báziselemeket báziselemekbe vagy* 0*-ba viszi. Határozzuk meg a sorozat homológiáit!*

Megoldás: Legyen a lánckomplexus $M_\bullet$ a $d_\bullet$ határleképezéssel, és az utolsó nem nulla modulus M_0. Ekkor

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ker}\, d_4 = 1 & \mathrm{Ker}\, d_3 = \begin{smallmatrix}1&&3\\&2&\end{smallmatrix} & \mathrm{Ker}\, d_2 = 2 & \mathrm{Ker}\, d_1 = \begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix} & \mathrm{Ker}\, d_0 = 1 \\
\mathrm{Im}\, d_5 = 0 & \mathrm{Im}\, d_4 = 2 & \mathrm{Im}\, d_3 = 2 & \mathrm{Im}\, d_2 = 1 & \mathrm{Im}\, d_1 = 1 \\
H_4(M_\bullet) = 1 & H_3(M_\bullet) = 1 \oplus 3 & H_2(M_\bullet) = 0 & H_1(M_\bullet) = 2 & H_0(M_\bullet) = 0
\end{array}$$

A többi homológia mind 0.

6. *Legyen* $\xi :\ 0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ *sorozat* mod-R*-ben. Bizonyítsuk be, hogy a következő állítások ekvivalensek:*

(i) ξ *egzakt, és* $\mathrm{Im}\,\alpha$ *direkt összeadandó* Y*-ban (így* $Y \cong X \oplus Z$*);*

(ii) ξ *egzakt, és* $\exists \alpha' : Y \to X$*, hogy* $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$*;*

(iii) ξ *egzakt, és* $\exists \beta' : Z \to Y$*, hogy* $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$*;*

(iv) $\exists \alpha : Y \to X$ *és* $\beta' : Z \to Y$*, hogy* $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$*,* $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$*,* $\alpha\beta = 0$*,* $\beta'\alpha' = 0$*, és* $\alpha'\alpha + \beta\beta' = \mathrm{id}_Y$*.*

Ilyenkor a ξ *sorozatot felhasadó rövid egzakt sorozatnak hívjuk.*

Megoldás: (i)⇒(ii): Legyen $Y = Y_1 \oplus Y_2$, ahol $Y_1 = \operatorname{Im}\alpha$, és π_1 az első komponensre való vetítés. Ekkor $\alpha' := \pi_1\alpha^{-1}$ értelmezve van, és jól van definiálva, mert α injektív. Továbbá $x \in X$-re $x\alpha\alpha' = x\alpha\pi_1\alpha^{-1} = x\alpha\alpha^{-1} = x$, tehát $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$.

(ii)⇒(iii): Tetszőleges $z \in Z$-re legyen $y \in Y$ olyan, amelyre $z = y\beta$, és legyen $\beta' : z \mapsto y - y\alpha'\alpha$. Ilyen y van, mert β szürjektív, és a β' leképezés jól definiált (és persze művelettartó), ugyanis ha $y\beta = y'\beta = z$, akkor $(y - y')\beta = 0$ miatt $y - y' \in \operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\alpha$, azaz van olyan $x \in X$, amelyre $y - y' = x\alpha$. Tehát $(y - y\alpha'\alpha) - (y' - y'\alpha'\alpha) = (y - y') - (y - y')\alpha'\alpha = x\alpha - x\alpha\alpha'\alpha = x\alpha - x\alpha = 0$. Végül $z = y\beta$-ra $z\beta'\beta = (y - y\alpha'\alpha)\beta = y\beta - y\alpha'\alpha\beta = z - 0 = z$, vagyis $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$.

(iii)⇒(i): $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$ az egzaktság miatt. Belátjuk, hogy $Y = \operatorname{Ker}\beta \oplus \operatorname{Im}\beta'$.
$Y = \operatorname{Ker}\beta + \operatorname{Im}\beta'$: $y \in Y$-ra $(y - y\beta\beta')\beta = y\beta - y\beta\beta'\beta = y\beta - y\beta = 0 \Rightarrow y - y\beta\beta' \in \operatorname{Ker}\beta$ $\Rightarrow y \in \operatorname{Ker}\beta + \operatorname{Im}\beta'$.
$\operatorname{Ker}\beta \cap \operatorname{Im}\beta' = 0$: Legyen $y = z\beta' \in \operatorname{Im}\beta' \cap \operatorname{Ker}\beta$. Ekkor $0 = y\beta = z\beta'\beta = z\mathrm{id}_Z = z \Rightarrow y = z\beta' = 0\beta' = 0$.

(ii)⇒(iv): Legyen β' a (ii)⇒(iii) bizonyításában megadott homomorfizmus: $y\beta = z$ esetén $z\beta' = y - y\alpha'\alpha$. Láttuk, hogy az eleve feltett $\alpha\beta = 0$ összefüggés mellett $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$ és $\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$. Továbbá $z = y\beta$-ra $z\beta'\alpha' = (y - y\alpha'\alpha)\alpha' = y\alpha' - y\alpha'\alpha\alpha' = y\alpha' - y\alpha' = 0$, így $\beta'\alpha' = 0$ is teljesül. Végül $y(\alpha'\alpha + \beta\beta') = y\alpha'\alpha + (y\beta)\beta' = y\alpha'\alpha + (y - y\alpha'\alpha) = y$ minden $y \in Y$-ra, ezért $\alpha'\alpha + \beta\beta' = \mathrm{id}_Y$.

(iv)⇒(ii): A feltételek szerint van olyan α, amelyre $\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$, tehát csak azt kell bizonyítani, hogy a sorozat egzakt (ami ezúttal nem feltétel).
$\alpha\alpha' = \mathrm{id}_X$ injektív $\Rightarrow \alpha$ injektív.
$\beta'\beta = \mathrm{id}_Z$ szürjektív $\Rightarrow \beta$ szürjektív.
$\alpha\beta = 0 \Rightarrow$ a sorozat féligegzakt.
$\operatorname{Ker}\beta \leq \operatorname{Im}\alpha$: Ha $y \in \operatorname{Ker}\beta$, akkor $y = y\alpha'\alpha + y\beta\beta' = y\alpha'\alpha + 0 \in \operatorname{Im}\alpha$.

Hf1. *Határozzuk meg az összes olyan α, β homomorfizmust, amelyre a $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z} \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_2 \to 0$ sorozat féligegzakt, és adjuk meg minden esetben a homológiákat!*

Hf2. *Bizonyítsuk be, hogy egy $0 \to X \xrightarrow{\alpha} Y \xrightarrow{\beta} Z \to 0$ féligegzakt sorozat akkor és csak akkor homotóp a csupa-0 sorozattal, ha felhasadó egzakt.*