Egy kategóriában

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd} \quad \textit{pullbackje} \quad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd} \quad \textit{ha } \forall \quad \begin{tikzcd} U' \arrow[r, "\alpha''"] \arrow[d, "\beta''"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd} \quad \exists!\ \varepsilon \quad \begin{tikzcd} U' \arrow[dr, dashed, "\varepsilon"] \arrow[drr, "\alpha''"] \arrow[ddr, "\beta''"'] & & \\ & \# U \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\beta'"] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ & X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \\ X & \end{tikzcd} \quad \textit{pushoutja} \quad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\alpha'"] \\ X \arrow[r, "\beta'"'] & U \end{tikzcd} \quad \textit{ha } \forall \quad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\#"] & Y \arrow[d, "\alpha''"] \\ X \arrow[r, "\beta''"'] & U' \end{tikzcd} \quad \exists!\ \varepsilon \quad \begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\alpha"'] & Y \arrow[d, "\alpha'"] \arrow[ddr, "\alpha''"] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \\ X \arrow[r, "\beta'"] \arrow[drr, "\beta''"'] & U \arrow[dr, dashed, "\varepsilon"] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \\ & & U' \end{tikzcd}$$

1. *Bizonyítsuk be, hogy a pullback és pushout — ha létezik — izomorfia erejéig egyértelmű, és hogy* Mod-R*-ben mindig létezik pullback:* $U = \{(x, y) \mid x\alpha = y\beta\} \leq X \oplus Y$ *és pushout:* $U = X \oplus Y / \{(z\alpha, -z\beta) \mid z \in Z\}$.

Megoldás: A pullback egyértelműsége — hasonlóan a szorzat és koszorzat egyértelműségének bizonyításához — az egyértelmű átvezethetőségből következik: ha U és U' is pullback ugyanahhoz a diagramhoz, akkor létezik a megfelelő háromszögeket kommutatívvá tevő $U' \xrightarrow{\varepsilon} U$ és $U \xrightarrow{\varepsilon'} U'$ átvezetés, és akkor az U, U párhoz az $\varepsilon'\varepsilon$ és id_U is jó, az U', U' párhoz pedig $\varepsilon\varepsilon'$ és $\mathrm{id}_{U'}$ is, tehát $\varepsilon'\varepsilon = \mathrm{id}_U$ és $\varepsilon\varepsilon' = \mathrm{id}_{U'}$, amiből következik U és U' izomorfiája. Pontosan ugyanígy lehet a pushout egyértelműségét bizonyítani.

A pullbackben a megadott U-hoz legyen β', illetve α' az első, illetve második komponensre való vetítés. Így nyilván kommutatív diagramot kapunk. Ha veszünk egy másik (U', β'', α'') hármast a harmadik diagram szerint, akkor ahhoz, hogy kommutatív legyen a negyedik diagram, csak az $\varepsilon : u' \mapsto (u'\beta'', u'\alpha'')$ leképezést vehetjük, ami nyilvánvalóan homomorfizmus $X \oplus Y$-ba, és $u'\beta''\alpha = u'\alpha''\beta$ miatt az U-ba képez.

A pushoutban β' és α' az első, illetve második komponens $X \oplus Y$-ba való beágyazásának és a faktorizálásnak a kompozíciója, azaz $\beta' : x \mapsto \overline{(x, 0)}$ és $\alpha' : y \mapsto \overline{(0, y)}$. A harmadik ábrán megadott U'-höz definiált ε csak akkor teszi kommutatívvá a negyedik diagramot, ha $\overline{(x, 0)} \mapsto x\beta''$ és $\overline{(0, y)} \mapsto y\alpha''$, azaz $\varepsilon : \overline{(x, y)} \mapsto x\beta'' + y\alpha''$. Az $(x, y) \mapsto x\beta'' + y\alpha''$ leképezés nyilván homomorfizmus $X \oplus Y$-ból U'-be, és a magjában benne van az U definíciójában használt faktorizáló részmodulus: $z\alpha\beta'' - z\beta\alpha'' = 0$, így definiál egy homomorfizmust U-ból U'-be.

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha modulusok pullbackjében vagy pushoutjában* α *vagy* β *monomorfizmus, illetve epimorfizmus, akkor a vele "párhuzamos" nyíl is ilyen!*

Megoldás: A monomorfizmus esetét bizonyítjuk (és a szimmetria miatt nyilván elég az α-ra), az epimorfizmus esete házi feladat.

Tegyük fel, hogy a pullbackben α monomorfizmus. Szeretnénk belátni, hogy α' is az. Ha $0 = (x, y)\alpha' = y$, akkor $x\alpha = y\beta = 0$, s mivel α monomorfizmus, ebből $x = 0$ is következik, azaz $(x, y) = (0, 0)$.

Tegyük fel, hogy a pushoutban α monomorfizmus. Ha $0 = y\alpha' = \overline{(0, y)}$, akkor van olyan $z \in Z$, amelyre $(0, y) = (z\alpha, -z\beta)$. Ebből $0 = z\alpha$, és α injektivitása miatt $z = 0$, tehát $y = -z\beta = 0\beta = 0$.

3. *Határozzuk meg az* $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$ *csoportot! Adjuk meg az elemeinek megfelelő bővítéseket* $\mathrm{Ex}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$*-ben!*

Megoldás: Használjuk a 7/3.a) feladat módszerét $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$ kiszámítására!
A $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_4 \to 0$ rövid egzakt sorozatból (a projektív feloldás első lépéséből) a

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_4) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_4) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4) \to 0$$

azaz

$$0 \to \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\beta} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4) \to 0$$

egzakt sorozatot kapjuk. Itt α injektív, és így az elemszámok miatt izomorfizmus is, de akkor $\mathrm{Ker}\,\beta = \mathbb{Z}_4$, tehát $\beta = 0$. Ebből pedig $\mathrm{Ker}\,\gamma = \mathrm{Im}\,\beta = 0$ következik, azaz γ injektív és szürjektív is, vagyis $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_4$.

Egy nyilvánvaló nemfelhasadó bővítés

$$\xi: \quad 0 \to \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{1\mapsto 4} \mathbb{Z}_{16} \xrightarrow{1\mapsto 1} \mathbb{Z}_4 \to 0.$$

Ha a második morfizmus helyett a (-1)-gyel való szorzást vesszük, a kapott bővítés könnyen láthatóan nem ekvivalens ξ-vel:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\xi: & 0 & \to & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{1\mapsto 4} & \mathbb{Z}_{16} & \xrightarrow{1\mapsto 1} & \mathbb{Z}_4 & \to & 0 \\
 & & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \kappa & & \downarrow \mathrm{id} & & \\
\xi': & 0 & \to & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{1\mapsto 4} & \mathbb{Z}_{16} & \xrightarrow{1\mapsto -1} & \mathbb{Z}_4 & \to & 0
\end{array}$$

nem lehet kommutatív, mert az első négyzet kommutativitásából $\kappa : 1 \mapsto 4k+1$ következik (valamely $k \in \mathbb{Z}$-re), és azzal nem kommutatív a második. (Mellesleg $\xi' \equiv (-\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_4})\xi \equiv \xi(-\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_4}) = -\xi$.) Tehát már csak egy nemtriviális bővítés hiányzik, és az csak $2\xi = (2\mathrm{id}_{\mathbb{Z}_4})\xi$ lehet, mivel $\mathrm{Ex}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4) \cong \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4) \cong \mathbb{Z}_4$.

Számítsuk ki 2ξ-t!

$$\begin{array}{ccccccccc}
2\xi: & 0 & \to & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{\varepsilon} & U & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{Z}_4 & \to & 0 \\
 & & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \kappa & & \downarrow 2\mathrm{id} & & \\
\xi: & 0 & \to & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{1\mapsto 4} & \mathbb{Z}_{16} & \xrightarrow{1\mapsto 1} & \mathbb{Z}_4 & \to & 0
\end{array}$$

U a $\mathbb{Z}_{16} \xrightarrow{1\mapsto 1} \mathbb{Z}_4 \xleftarrow{2\mathrm{id}} \mathbb{Z}_4$ diagram pullbackje, azaz

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_4 \,|\, x \equiv 2y \pmod 4\} = \langle (2, 1), (8, 2) \rangle \cong \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Valóban, ha $\mathbb{Z}_4$-et az $\langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \cong \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_2$ csoportba képezzük úgy, hogy $1 \mapsto 2a + b$, akkor ez beágyazás lesz, és a faktorcsoportot a generálja, tehát $\mathbb{Z}_4$-nek $\mathbb{Z}_4$-gyel való bővítését kapjuk.

4. *Legyen A véges dimenziós K-algebra, és $M, N \in$ mod-A. Bizonyítsuk be, hogy ha a ξ és η bővítések lineárisan összefüggők, de egyik sem nulla* $\mathrm{Ex}(M, N)$*-ben (azaz nem felhasadók), akkor a középső tagjuk izomorf!*

Megoldás: A feltétel miatt $\eta = c \cdot \xi$ valamely $0 \neq c \in K$ elemre, azaz $\eta = (c \cdot \mathrm{id})\xi$ az $\mathrm{Ex}(M, N)$-ben. A

$$\begin{array}{ccccccccc}
c\xi: & 0 & \to & N & \to & L & \to & M & \to & 0 \\
 & & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \kappa & & \downarrow c\cdot\mathrm{id} & & \\
\xi: & 0 & \to & N & \to & \tilde{L} & \to & M & \to & 0
\end{array}$$

diagramban id és $c \cdot \mathrm{id}$ is izomorfizmus, így a kígyó-lemma miatt κ is az.

5. *Tekintsük azt az A gráfalgebrát, amelynek jobbreguláris modulusa* $A_A = \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix}2\\2\\2\end{smallmatrix}$.

Határozzuk meg az $\mathrm{Ext}^1_A(\,{}_1\,,\,{}_2^2\,)$ *vektortér dimenzióját, és adjunk meg a vele izomorf* $\mathrm{Ex}_A(\,{}_1\,,\,{}_2^2\,)$ *térben egy bázist. Ciklikus lesz-e ez mint* $\mathrm{End}(\,{}_1\,)$*-, illetve mint* $\mathrm{End}(\,{}_2^2\,)$*-modulus?*

Megoldás: $\mathrm{Ext}^1(\,{}_1\,,\,{}_2^2\,)$ kiszámításához tekintsük az ${}_1$ modulus projektív feloldásának első lépését:

$$0 \to {}_2^2 \to \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} \to {}_1 \to 0$$

és a $\mathrm{Hom}(-,\,{}_2^2\,)$ funktor által hozzárendelt hosszú egzakt sorozat elejét (mint a 7/3.a) feladatban):

$$0 \to \mathrm{Hom}(\,{}_1\,,\,{}_2^2\,) \to \mathrm{Hom}(\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix},\,{}_2^2\,) \to \mathrm{Hom}(\,{}_2^2\,,\,{}_2^2\,) \to \mathrm{Ext}^1(\,{}_1\,,\,{}_2^2\,) \to 0.$$

Itt a Hom-ok dimenziói rendre $0, 0, 2$, és így $\dim \mathrm{Ext}^1(\,{}_1\,,\,{}_2^2\,) = 2 - 0 + 0 = 2$. Tehát elég két független nem felhasadó bővítést találni, ilyenek az $\begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}$ projektív modulus és az ${}^1{}_2{}^2$ modulusok. Mivel ezek nem izomorfak (és a bővítésk nem felhasadók), a 4. feladat szerint nem lehetnek lineárisan összefüggők $\mathrm{Ex}(\,{}_1\,,\,{}_2^2\,)$-ben.

Mivel $\mathrm{End}(\,{}_1\,)$ csak az id skalárszorosaiból áll, $\mathrm{End}(\,{}_1\,) \cong K$ test, vagyis $\mathrm{Ex}(\,{}_1\,,\,{}_2^2\,)$ efölött vektortér, és egy kétdimenziós vektortér nem lehet ciklikus.

$\mathrm{End}(\,{}_2^2\,)$-nek viszont van olyan eleme, amely nem izomorfizmus; ilyen például az az $\alpha : {}_2^2 \to {}_2^2$ homomorfizmus, amely a felső báziselemet az alsóba viszi (az alsót pedig 0-ba). Nézzük meg, mi lesz a projektív középső tagú ξ bővítésnek az α-val való lenyomottja!

$$\begin{array}{lccccccccc}
\xi: & 0 & \to & {}_2^2 & \to & \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix} & \to & {}_1 & \to & 0 \\
 & & & \downarrow \alpha & & \downarrow \kappa & & \downarrow \mathrm{id} & & \\
\xi\alpha: & 0 & \to & {}_2^2 & \to & \tilde{L} & \to & {}_1 & \to & 0
\end{array}$$

(ξ-ben azokat a morfizmusokat vesszük, amelyek a Loewy-diagramhoz tartozó báziselemeket báziselemekbe vagy 0-ba viszik.)

Itt $\tilde{L}$-ot a pushoutban úgy kapjuk meg, hogy a ${}_2^2 \oplus \begin{smallmatrix}1\\2\\2\end{smallmatrix}$ direkt összegben az első komponens második báziselemének és a második komponens felső 2-es típusú báziselemének a különbsége által generált részmodulussal faktorizálunk ki, így a kapott modulus Loewy-diagramja ${}^1{}_2{}^2$. Tehát ξ kigenerálja a teljes jobb $\mathrm{End}(\,{}_2^2\,)$-modulust.

Hf1. *Bizonyítsuk be a 2. feladat állítását arra az esetre, amikor egy pullbackban, illetve pushoutban α epimorfizmus! (Használjuk az 1. feladatban megadott konstrukciókat!)*

Hf2. *Legyen*

$$\xi: \quad 0 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_4 \to 0$$

az a bővítés $\mathrm{Ex}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_4)$*-ben, amelynél a monomorfizmus az* 1 *elemet* $(1,2)$*-be képezi, az epimorfizmus pedig* $(0,1)$*-et* 1*-be,* $(1,0)$*-t pedig* 2*-be. Határozzuk meg az* $f\xi$ *és* ξg *bővítésekben a középső tagot, ha* $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4$ *és* $g : \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2$ *nemnulla homomorfizmusok!*