1. *Bizonyítsuk be, hogy* $\mathrm{Hom}_R(R,M)$ *jobb* R*-modulus minden* $M \in \mathrm{Mod}\text{-}R$*-re, és lássuk be, hogy* $\mathrm{Hom}_R(R,-)$ *additív, kovariáns funktor, amely természetesen izomorf az identitás funktorral!*

Megoldás: Az R gyűrű egyúttal R-R-bimodulus, így a 2/1.b) feladat szerint $\mathrm{Hom}_R(R,M)$ jobb R-modulus az $x(\varphi r) = (rx)\varphi$ hatással. A $\mathrm{Hom}_R(R,-)$ funktor az $M \xrightarrow{\alpha} N$ morfizmushoz a $\mathrm{Hom}_R(R,M) \to \mathrm{Hom}_R(R,N)$, $\varphi \mapsto \varphi\alpha$ morfizmust rendeli, és ezzel nyilvánvalóan kovariáns és additív.
$M \cong \mathrm{Hom}_R(R,M)$:
$\forall m \in M$-re $\exists!$ $\varphi_m \in \mathrm{Hom}_R(R,M)$, amire $\varphi_m(1) = m$, ugyanis R_R szabad modulus az 1-gyel mint szabad generátorral. Legyen $T_M : m \mapsto \varphi_m$. Ez a T_M modulus-homomorfizmus:

$$1\varphi_{m+m'} = m + m' = 1\varphi_m + 1\varphi_{m'} = 1(\varphi_m + \varphi_{m'}),$$
$$1\varphi_{mr} = mr = 1\varphi_m \cdot r = (1r)\varphi_m = (r1)\varphi_m = 1(\varphi_m r).$$

T_M injektív, mert ha $\varphi_m = 0$, akkor $m = 1\varphi_m = 0$.
T_M szürjektív, mert tetszőleges $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(R,M)$-re $m := 1\varphi$-vel $r\varphi = (1 \cdot r)\varphi = (1\varphi)r = mr = (1\varphi_m)r = r\varphi_m$ minden $r \in R$-re, így $\varphi = \varphi_m$.
Végül T_M ($M \in \mathrm{Mod}\text{-}R$) természetes izomorfizmus a $\mathrm{Hom}_R(R,-)$ és az identitás funktor között: $M \xrightarrow{\alpha} N$-re és $m \in M$-re
$m \xmapsto{T_M} \varphi_m \xmapsto{\mathrm{Hom}(R,\alpha)} \varphi_m\alpha$
$m \xmapsto{\alpha} m\alpha \xmapsto{T_N} \varphi_{m\alpha}$, és
$1(\varphi_m\alpha) = (1\varphi_m)\alpha = m\alpha = 1\varphi_{m\alpha}$, így $\varphi_m\alpha = \varphi_{m\alpha}$ az egész R-en.

2. *Legyen* $\xi : 0 \to N \to L \to M \to 0$ *bővítés egy* A *algebra moduluskategóriájában, és* φ_c *a* $c \neq 0$ *testelemmel való szorzás mint automorfizmus a modulusokon. Bizonyítsuk be, hogy* $\xi\varphi_c = \varphi_c\xi$

Megoldás: A következő két kommutatív diagram mutatja, hogy $\varphi_c\xi$ a bal oldali diagram felső sora, $\xi\varphi_c$ pedig a jobb oldali diagram alsó sora (mindkettő egzakt, mert egy nem nulla skalárral való szorzás nem változtatja a magot és a képet).

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & L \arrow[r, "\beta\varphi_c^{-1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_c"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"'] & L \arrow[r, "\beta"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\varphi_c"] & L \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\varphi_c^{-1}\alpha"'] & L \arrow[r, "\beta"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ez a kettő pedig ekvivalens:

$$\begin{tikzcd}
\varphi_c\xi : & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & L \arrow[r, "\beta\varphi_c^{-1}"] \arrow[d, "\varphi_c^{-1}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
\xi\varphi_c : & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\varphi_c^{-1}\alpha"'] & L \arrow[r, "\beta"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ugyanis $\alpha\varphi_c^{-1} = \varphi_c^{-1}\alpha = c^{-1}\alpha$, és ugyanígy a β-ra.

3. *Legyenek* $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathrm{Ex}(M,N)$*, és* $f_1, f_2, f \in \mathrm{Hom}(M', M)$*. Bizonyítsuk be, hogy*

a) $f\Delta_M = \Delta_{M'}(f \oplus f)$*;*
b) $f_1 + f_2 = \Delta_{M'}(f_1 \oplus f_2)\nabla_M$*;*
c) $(f_1 + f_2)\xi = f_1\xi + f_2\xi$*;*
d) 0ξ *felhasadó;*
e) 0ξ *nullelem* $\mathrm{Ex}(M,N)$*-ben, és* $-\xi := (-\mathrm{id}_M)\xi = \xi(-\mathrm{id}_N)$ *additív inverze a* ξ*-nek.*

Megoldás: a) $(m'f)\Delta_M = (m'f, m'f) = (m', m')(f \oplus f) = (m'\Delta_{M'})(f \oplus f)$ minden $m' \in M'$-re.

b) $m'\Delta_{M'}(f_1 \oplus f_2)\nabla_M = (m', m')(f_1 \oplus f_2)\nabla_M = (m'f_1, m'f_2)\nabla_M = m'f_1 + m'f_2 = m'(f_1 + f_2)$ minden $m' \in M'$-re.

c) $(f_1 + f_2)\xi = \Delta_{M'}(f_1 \oplus f_2)\nabla_M\xi = \Delta_{M'}(f_1 \oplus f_2)(\xi \oplus \xi)\nabla_N = \Delta_{M'}(f_1\xi \oplus f_2\xi)\nabla_N = f_1\xi + f_2\xi$.

d)

$$\begin{tikzcd}
0\xi: & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & N \oplus M \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1\alpha"] & M \arrow[r] \arrow[d, "0"] & 0 \\
\xi: & 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\alpha"'] & L \arrow[r, "\beta"'] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

e) Az összeadás nyilván kommutatív, ezért elég az egyik sorrendben felírt összegre ellenőrizni az axiómákat. A d) rész megoldásából látható, hogy $0\xi = 0\eta$ tetszőleges $\xi, \eta \in \mathrm{Ex}(M, N)$-re. Így $0\xi + \eta = 0\eta + \mathrm{id}_M\eta$, és ez a c) rész miatt $= (0 + \mathrm{id}_M)\eta = \mathrm{id}_M\eta = \eta$.

A 2. feladatból kiderült, hogy $(-\mathrm{id}_M)\xi = \xi(-\mathrm{id}_M)$. Erre a bővítésre $\xi + (-\mathrm{id}_M)\xi = \mathrm{id}_M\xi + (-\mathrm{id}_M)\xi = (\mathrm{id}_M - \mathrm{id}_M)\xi = 0\xi$ az $\mathrm{Ex}(M, N)$ nulleleme.

4. *Az öröklődő (pontosabban jobb öröklődő) gyűrűt azzal definiáltuk, hogy* mod-R *minden projektív modulusának minden részmodulusa is projektív. Bizonyítsuk be, hogy R akkor és csak akkor öröklődő, ha minden injektív modulus minden homomorf képe injektív.*

Megoldás: Láttuk, hogy a projektív modulusokra adott feltétel ekvivalens azzal, hogy a jobb globális dimenzió legföljebb 1, azaz, hogy $\mathrm{Ext}^2(M, N) = 0$ minden $M, N \in$ Mod-R-re. Hasonlóan bizonyíthatjuk, hogy az injektívekre kimondott feltétel is ezzel ekvivalens.

Ha $\mathrm{Ext}^2(-, -) = 0$, és a Q injektív modulusnak homomorf képe Y, azaz van egy $0 \to X \to Q \to Y \to 0$ egzakt sorozat, akkor az ehhez és a $\mathrm{Hom}(M, -)$ funktorhoz tartozó hosszú egzakt

$$\cdots \to \mathrm{Ext}^1(M, Q) \to \mathrm{Ext}^1(M, Y) \to \mathrm{Ext}^2(M, X) \to \cdots$$

sorozatban $\mathrm{Ext}^1(M, Q) = \mathrm{Ext}^2(M, X) = 0$, ezért $\mathrm{Ext}^1(M, Y) = 0$ minden M-re, vagyis Y injektív.

Fordítva, ha minden injektív homomorf képe is injektív, akkor tetszőleges modulus injektív feloldása befejezhető az első komagnál: $0 \to M \to Q \to Q/M \to 0$, így minden modulus injektív dimenziója legföljebb 1, tehát a globális dimenzió is legföljebb 1.

5. *Legyen A az a gráfalgebra, amelyre a reguláris modulus Loewy-diagramja*

$$A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 4 \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}.$$

Határozzuk meg a következő modulusok projektív dimenzióját!

$$\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, \qquad \begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}, \qquad \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}, \qquad \begin{smallmatrix} 2 & & 4 \\ & 3 & \end{smallmatrix}$$

Megoldás: A projektív feloldások:

$$0 \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & \mathbf{4} & \\ 1 & \mathbf{3} & \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 0$$

$$0 \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & \mathbf{2} & 4 \\ \mathbf{1} & & \mathbf{3} \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix} \to 0$$

$$0 \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 3 \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & \underline{3} \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ \underline{3} \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & & \mathbf{3} \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & & \mathbf{3} \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix} \to 0$$

$$0 \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 3 \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & \underline{3} \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ \underline{3} \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & & \mathbf{3} \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ \mathbf{1} & & \underline{3} \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ \underline{3} \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 2 & 4 \\ 3 & \end{smallmatrix} \to 0$$

ahol a magok bázisát a vastagított számoknak megfelelő báziselemek és az aláhúzottak különbségei adják. A projektív feloldások hossza alapján a projektív dimenziók 1, 1, 4 és 4.

6. *a) Bizonyítsuk be, hogy ha M nem projektív, és $0 \to K_1 \to P_0 \to M \to 0$ az M projektív feloldásának első lépése, akkor* $\operatorname{pd} M = 1 + \operatorname{pd} K_1$.

b) Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{pd}(M \oplus N) = \max\{\operatorname{pd} M, \operatorname{pd} N\}$.

c) Határozzuk meg az 5. feladat algebrájának globális dimenzióját.

Megoldás: a) Hattassuk a $\operatorname{Hom}(-, N)$ funktort erre a rövid egzakt sorozatra. Ha $\operatorname{pd} M = d > 0$, akkor az

$$\cdots \operatorname{Ext}^{d-1}(K_1, N) \to \operatorname{Ext}^d(M, N) \to \operatorname{Ext}^d(P_0, N) \to \operatorname{Ext}^d(K_1, N) \to \operatorname{Ext}^{d+1}(M, N) \cdots$$

hosszú egzakt sorozatban $\operatorname{Ext}^d(P_0, N) = \operatorname{Ext}^{d+1}(M, N) = 0$, így $\operatorname{Ext}^d(K_1, M) = 0$, másrészt $\operatorname{Ext}^d(P_0, N) = 0$ miatt az $\operatorname{Ext}^{d-1}(K_1, N) \to \operatorname{Ext}^d(M, N)$ szürjektív, és $\operatorname{Ext}^d(M, N) \neq 0$ valamely N-re, így erre az N-re $\operatorname{Ext}^{d-1}(K_1, N) \neq 0$.
Tehát $\operatorname{pd} K_1 = d - 1$.

b) Az M és N projektív feloldásának direkt összege projektív feloldása $M \oplus N$-nek, és a magok akkor válnak projektívvé, amikor mindkettőben projektívvé válnak.

c) A globális dimenzió az egyszerűek projektív dimenziójának a maximuma.

$$0 \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 3 \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{smallmatrix} \to 3 \to 0,$$

így $\operatorname{pd} 3 = 1$.
A 4 modulus első syzygyje 3, így az a) rész szerint $\operatorname{pd} 4 = 2$.
A 1 modulus projektív feloldása

$$0 \to \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} 3 \\ \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & \underline{3} \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ \underline{3} \end{smallmatrix} \to \begin{smallmatrix} & 1 & \\ & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{1} & & \mathbf{3} \end{smallmatrix} \to 1 \to 0,$$

így $\operatorname{pd} 1 = 3$,
végül 2 első syzygyje $1 \oplus 3$, tehát az a) és b) rész szerint
$\operatorname{pd} 2 = 1 + \operatorname{pd}(1 \oplus 3) = 1 + \max\{\operatorname{pd} 1, \operatorname{pd} 3\} = 1 + \max\{3, 1\} = 4$.
Tehát az algebra globális dimenziója 4.

Hf1. *Határozzuk meg az* $\operatorname{Ext}^1(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3)$ *csoportot, és adjunk meg $\mathbb{Z}_3$ és $\mathbb{Z}_3$ között két nem ekvivalens, nem felhasadó bővítést!*

Hf2. *Határozzuk meg annak az A gráfalgebrának a globális dimenzióját, amelyre a reguláris modulus Loewy-diagramja*

$$A_A = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 3 & \\ 2 & & 4 \\ & 1 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}.$$