

1. Hozzuk trigonometrikus alakra az alábbi komplex számokat:

a) $1 + i$; b) -8 ; c) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; d) $1 - i \operatorname{tg} \alpha$; e) $\sin 12^\circ - i \cos 12^\circ$.

2. Számítsuk ki

- a) a $(-\sqrt{3} + i)^{-9}$ komplex szám értékét, és hozzuk az eredményt algebrai alakra;
b) $-243i$ összes ötödik gyökét (trigonometrikus alakban);
c) a $z^6 - z^3 + 1 - i = 0$ egyenlet összes megoldását;
d) a $\bar{z} = z^n$ ($n \in \mathbb{N}$) egyenlet összes megoldását.

3. a) Tetszőleges n természetes számra számítsuk ki („zárt alakban”) $(1 + i)^n$ értékét.

b) Adjuk meg „zárt alakban” az $\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots$ összeg értékét.

c) Adjunk képletet $\cos(nx)$ -re $\cos x$ és $\sin x$ függvényében.

4. Adjuk meg $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ függvényként (a szokásos algebrai műveletek és a konjugálás segítségével) az alábbi síktranszformációkat:

- a) origo körüli α szögű forgatás;
b) $1 + i$ körüli 60° -os forgatás
c) Az x , illetve az y tengelyre való tükrözés;
d) az origón és a $2i + 1$ ponton átmenő tengelyre való tükrözés;

5. Adjuk meg annak a négyzetnek a másik két csúcsát, amelynek két átellenes csúcsát két adott komplex szám, z_1 és z_2 alkotják!

6. Legyen $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n\}$ az n -edik egységgyökök halmaza adott $n \geq 1$ -re. Számítsuk ki az alábbi kifejezéseket:

a) $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i$; b) $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^k$ valamilyen $k \in \mathbb{N}$ -re; c) $\prod_{i=1}^n \varepsilon_i$.

7. Tegyük föl, hogy két egységgyök összege is egységnyi hosszúságú.

- a) Mit mondhatunk a két egységgyök által bezárt szögről?
b) Mutassuk meg, hogy ekkor az összeg ugyancsak egységgyök.

8. Legyenek megadva az alábbi mátrixok:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehet:

$$A + A, \quad A + B, \quad AB, \quad AC, \quad AC + 2C, \quad AD - 3D, \quad D^2, \quad BC, \quad CB.$$

9. Tetszőleges $n > 1$ -re adjunk meg olyan $n \times n$ -es A és B valós mátrixokat, melyekre $AB = 0$, és $BA \neq 0$.

10. Keressünk olyan $n \times n$ -es A, B, C valós mátrixokat, melyekre:

- a) van olyan k , hogy $A^k = E$, és $A \neq \pm E$;
b) van olyan k , hogy $B^k = 0$, és $B \neq 0$;
c) $C^2 = C$, és $C \neq 0, E$.

11. Legyenek A, B tetszőleges $n \times n$ -es mátrixok. Bizonyítsuk be, hogy a $AB - BA$ mátrix főátlójában az elemek összege 0?