

1. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát és inverzét:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2i+2 & 2i-3 & i \\ 1 & i & 2i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Lássuk be, hogy egy egész elemű mátrix inverze pontosan akkor egész elemű, ha a mátrix determinánsa ± 1 .

3. Adjuk meg a következő egyenletrendszerek összes megoldását:

$x + 2y - z = 2$	$x + y + z = 4$	$7x + 14y - 21z = 7$
a) $3x - y + 2z = 7$	b) $-x + y - z = 2$	c) $x + 2y - 3z = 1$
$x - z = -2$	$2x + y + 2z = 1$	$5x + 10y + 15z = 5$
$2x + y + z = 7$	$4x + 4y + 4z = 1$	$3x + 6y - 9z = 3$

4. n elem sorbarendezésénél mi az inverziók számának lehetséges maximuma?

5. Hány inverzió van az alábbi permutációkban?

a) $1, 2, 3, 4$; b) $2, 4, 3, 1$; c) $n, n-1, \dots, 1$; d) $1, 3, \dots, 2n-1, 2, 4, \dots, 2n$.

6. Hogyan változik egy $n \times n$ -es mátrix determinánsa, ha tükrözzük a négyzet négy különböző szimmetriatengelyére? Hát ha elforgatjuk 90° , 180° , ill. 270° fokkal?

7. Legyen A egy 5×5 -ös mátrix, amelynek determinánsa 3 . Mi lesz a determinánsa a következő mátrixoknak?

a) $2A^{-1}$

b) $(2A)^{-1}$

c) $A^2 \cdot A^T \cdot A^{-1}$

8. Legyen adva egy k egyenletből és n ismeretlenből álló racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer. Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetések közül.

- a) Ha $k \leq n$, akkor az egyenletrendszernek létezik megoldása.
 b) Ha $k > n$, akkor az egyenletrendszernek nem létezik megoldása.
 c) Ha $k < n$, és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor végtelen sok megoldása van.
 d) Ha $k > n$, és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor csak egy megoldása van.
 e) Ha létezik valós megoldás, akkor létezik (csupa) racionális megoldás is.
 f) Ha bármely $k-1$ egyenletet kiválasztva az így kapott egyenletrendszernek létezik megoldása, akkor az eredetinek is létezik megoldása.

9. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, aminek

- a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
 b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
 c) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és nincs megoldása;
 d) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és pontosan 5 megoldása van?

10. Az a és b értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek?

$$2x + y + z = 4$$

$$x + 2y - z = -3$$

$$x - y + 2z = a$$

$$x + by + z = 3$$