1. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát és inverzét:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2i+2 & 2i-3 & i \\ 1 & i & 2i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. Lássuk be, hogy egy egész elemű mátrix inverze pontosan akkor egész elemű, ha a mátrix determinánsa ± 1.

3. Adjuk meg a következő egyenletrendszerek összes megoldását:

a) $$\begin{aligned} x+2y-z &= 2 \\ 3x-y+2z &= 7 \\ x-z &= -2 \\ 2x+y+z &= 7 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x+y+z &= 4 \\ -x+y-z &= 2 \\ 2x+y+2z &= 1 \\ 4x+4y+4z &= 1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 7x+14y-21z &= 7 \\ x+2y-3z &= 1 \\ 5x+10y+15z &= 5 \\ 3x+6y-9z &= 3 \end{aligned}$$

4. n elem sorbarendezésénél mi az inverziók számának lehetséges maximuma?

5. Hány inverzió van az alábbi permutációkban?

a) $1,2,3,4$; b) $2,4,3,1$; c) $n,n-1,\dots,1$; d) $1,3,\dots,2n-1,2,4,\dots,2n$.

6. Hogyan változik egy $n\times n$-es mátrix determinánsa, ha tükrözzük a négyzet négy különböző szimmetriatengelyére? Hát ha elforgatjuk 90, 180, ill. 270 fokkal?

7. Legyen A egy 5×5-ös mátrix, amelynek determinánsa 3. Mi lesz a determinánsa a következő mátrixoknak?

a) $2A^{-1}$ b) $(2A)^{-1}$ c) $A^2\cdot A^T\cdot A^{-1}$

8. Legyen adva egy k egyenletből és n ismeretlenből álló racionális együtthatós lineáris egyenletrendszer. Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetések közül.

a) Ha $k\le n$, akkor az egyenletrendszernek létezik megoldása.
b) Ha $k>n$, akkor az egyenletrendszernek nem létezik megoldása.
c) Ha $k<n$, és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor végtelen sok megoldása van.
d) Ha $k>n$, és az egyenletrendszernek van megoldása, akkor csak egy megoldása van.
e) Ha létezik valós megoldás, akkor létezik (csupa) racionális megoldás is.
f) Ha bármely $k-1$ egyenletet kiválasztva az így kapott egyenletrendszernek létezik megoldása, akkor az eredetinek is létezik megoldása.

9. Van-e olyan lineáris egyenletrendszer, aminek

a) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
b) 6 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és egyértelmű a megoldása;
c) 5 egyenlete, 6 ismeretlenje van, és nincs megoldása;
c) 5 egyenlete, 5 ismeretlenje van, és pontosan 5 megoldása van?

10. Az a és b értékétől függően hány megoldása van az alábbi egyenletrendszernek?

$$\begin{aligned} 2x+y+z &= 4 \\ x+2y-z &= -3 \\ x-y+2z &= a \\ x+by+z &= 3 \end{aligned}$$