1. Számítsuk ki a következő mátrixok determinánsát.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 2 & d+e & d^2+e^2 & d^3+e^3 \end{bmatrix}$ e) $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$ (Útmutatás: $AA^T = ?$)

2. Osszuk el maradékosan az $x^5 - 2x^2 + 4$ polinomot

a) $(x+1)$-gyel; b) $(x+1)^2$-nel; c) (x^2-1)-gyel.

3. Lássuk be, hogy $(x-c)^k$ akkor és csak akkor osztója az $f(x)$ polinomnak, ha $f^{(j)}(c) = 0$ minden $0 \le j \le k-1$-re.

4. Lássuk be, hogy ha az $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomnak egy $\frac{p}{q}$ racionális szám gyöke (ahol $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p,q) = 1$), akkor $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$.

5. Keressük meg a $2x^6 + x^5 - 5x^4 - 2x^3 - 4x^2 - 3x + 3$ polinom összes gyökét. Bontsuk föl a polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben, illetve $\mathbb{Q}[x]$-ben.

6. Adjuk meg a következő polinomok gyöktényezős alakját:

a) $x^3 - 1$; b) $x^2 + x + 1$; c) $x^n - 1$; d) $x^n + 1$;

e) $x^{2n} - x^{2n-1} + \ldots + x^2 - x + 1$.

7. Bontsuk föl az $x^5 + 1$ polinomot irreducibilis polinomok szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben, $\mathbb{R}[x]$-ben, illetve $\mathbb{Q}[x]$-ben.

8. Mit ad maradékul a $\mathbb{C}[x]$-beli $3x^{21} - 2x^{14} + 5x^9 - 7$ polinom $(x-i)$-vel, $(x+i)$-vel, (x^2+1)-gyel, illetve $(x-1)^3$-bel osztva?

9. Van-e olyan polinom $\mathbb{Q}[x]$-ben, amelynek nem minden együtthatója egész, mégis egész értéket vesz föl minden egész helyen?