1. Keressük ki az izomorfakat az alábbi vektorterek(?) közül a zárójelben megadott test fölött!

a) $\mathbb{R}^6$ ($\mathbb{R}$); b) $\mathbb{C}^3$ ($\mathbb{R}$); c) $\mathbb{C}^3$ ($\mathbb{C}$);
d) $\mathbb{R}^{3\times 2}$ ($\mathbb{R}$); e) a sík egybevágóságai ($\mathbb{R}$); f) $\{\, p \in \mathbb{Z}_2[x] \mid x^2 \mid p, \deg p \leq 9 \,\}$ ($\mathbb{Z}_2$);
g) $\mathbb{Z}_3^9$ ($\mathbb{Z}_3$); h) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_2^3, \mathbb{Z}_2^3)$ ($\mathbb{Z}_2$); i) $\{(x_1, \ldots, x_9) \in \mathbb{Z}_2^9 \mid x_1 + x_9 = 0\,\}$ ($\mathbb{Z}_2$).
j) $\{\, A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid$ az A-beli sorösszegek mind 0-k $\}$ ($\mathbb{R}$);
k) $\{\, p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p \leq 10,$ p mint függvény páros $\}$ ($\mathbb{R}$);

ahol $K^{n\times m}$ a K-beli együtthatós $n \times m$-es mátrixok terét jelöli.

2. Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, és legyenek $v_1, \ldots, v_n$ tetszőleges vektorok. Mely állítások következnek valamelyik másikból (esetleg több másikból)?

a) φ injektív. b) φ szürjektív.
c) $v_1, \ldots, v_n$ generátorrendszer V-ben. d) $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ generátorrendszer W-ben.
e) $v_1, \ldots, v_n$ lineárisan független V-ben. f) $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ lineárisan független W-ben.
g) Van olyan V-beli bázis, melynek a képe lineárisan független W-ben.

Változik-e a következtetések rendszere, ha föltesszük, hogy $\dim V = \dim W < \infty$?

3. Mely V vektorterekhez tudunk megadni olyan $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, V)$ lineáris transzformációt, melyekre $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{Im}\,\varphi$?

4. Adjuk meg az alábbi lineáris leképezések mátrixát a megadott bázispárban!

a) a sík α szögű elforgatása az origó körül; (a bázis mindkét térben: (i) $\{(1, 0), (0, 1)\,\}$; (ii) $\{(1, 0), (\cos\alpha, \sin\alpha)\,\}$);
b) a legföljebb n-edfokú valós polinomok terén $p(x) \mapsto p'(x)$ (a bázis mindkét térben: $\{\, 1, x, x^2, \ldots, x^n \,\}$);
c) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(a, b, c) \mapsto (a + b, 2a - c)$ (a standard bázisokkal);
d) a sík tükrözése egy origón átmenő, α irányszögű egyenesre (a standard bázisban).

5. Tekintsük a síkot, $\mathbb{R}^2$-et a szokásos bázisával: $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\,\}$, valamint a $\mathcal{B}' = \{(1, 0), (1, 1)\,\}$ bázissal. Jellemezzük azt a $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ leképezést, melyre:

a) $[\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; b) $[\varphi]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; c) $[\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;
d) $[\varphi]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; e) $[\varphi]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; f) $[\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

6. Tekintsük azt a $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ lineáris transzformációt, melynek mátrixa a standard bázisban $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Mi lesz a φ-képe annak a négyzetnek, melynek a csúcsai az $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)$ pontok? Mennyi lesz az új alakzat területe? Mire következtethetünk ebből az egybevágóságok mátrixára nézve?

7. Alkalmas bázist és lineáris transzformációt keresve határozzuk meg az alábbi mátrixhatványokat!

a) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n$; b) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}^n$.