

1. Számítsuk ki a következő (valós) mátrixok rangját (ahol paraméter van, ott annak függvényében)!

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b & 2 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$$

Adjunk meg annyi független sort, és annyi független oszlopot, mint amennyi a mátrix rangja!

2. Számítsuk ki az $f : (x, y, z) \mapsto (x + y - 2z, x + z, 2x + y - z, -x - z)$ leképezés mátrixának a rangját! Hány dimenziós f képtere és magtere? Adjuk meg a képtérnek és a magtérnek egy-egy bázisát!

3. Hogyan változhat a mátrix rangja, ha

- egy sorának minden elemét megszorozzuk ugyanazzal a számmal;
- egy sorának minden eleméhez hozzáadjuk ugyanazt a számot;
- (négyzetes mátrixra) a főátló minden elemét megszorozzuk ugyanazzal a számmal;
- a mátrix minden eleméhez hozzáadjuk ugyanazt a számot;
- transzponáljuk a mátrixot;
- “tükrözzük” a mátrixot a mellékátlóra?

4. Legyen $f : V \rightarrow V$ lineáris leképezés. Mutassuk meg, hogy vagy az igaz, hogy $V = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$, vagy az, hogy f^2 rangja kisebb f rangjánál!

5. Ha A $n \times n$ -es mátrix, amelyre $A^2 = 0$, akkor mekkora lehet A rangja?

6. Legyen A az az $n \times n$ -es mátrix, amelynek főátlójában csupa 0, mindenhol máshol csupa 1-es áll. Adjuk meg az A mátrix rangját, ha $\mathbb{Q}$ fölötti, illetve ha $\mathbb{Z}_2$ fölötti mátrixnak tekintjük!

7. Legyen A egy 10×10 -es valós mátrix. Jelölje r_i az A^i mátrix rangját. Lehet-e az $(r_1, r_2, \dots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal?

- $(5, 6, \dots)$;
- $(9, 8, 7, \dots, 4, 4, \dots)$;
- $(10, 9, 8, \dots)$;
- $(8, 5, \dots)$;
- $(8, 7, 5, \dots)$;
- $(7, 5, 5, 4, \dots)$;
- $(8, 6, 4, 3, 3, \dots)$?

8. Bilineáris-e az f leképezés, ha

- $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = xy$;
 - $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x$;
 - $f(\varphi, \psi) = \varphi \circ \psi$ a valós függvények terén;
 - a c)-beli leképezés a valós lineáris függvények terén;
 - $f(\varphi, \psi) = \varphi(2) \cdot \psi(3)$, ahol φ és ψ valós együtthatós, legfőbb másodfokú polinomok.
- Adjuk meg a fenti leképezések közül a bilineáris függvényeknek mátrixát is!

9. Adjuk meg a $B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$ bilineáris függvény mátrixát a standard bázisban, és az $\{(1, 1), (0, 1)\}$ bázisban is. Adjuk meg a B -hez tartozó kvadratikus alakot. Döntsük el, hogy B pozitív (szemi)definit, negatív (szemi)definit, vagy indefinit!

10. Hozzuk diagonális alakra a következő kvadratikus alakokat! Döntsük el, vajon pozitív, negatív definit vagy indefinitek!

- $x_1^2 + x_1x_2$;
- x_1x_2 ;
- $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$.