1. Számítsuk ki a következő (valós) mátrixok rangját (ahol paraméter van, ott annak függvényében)!

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b & 2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}$

Adjunk meg annyi független sort, és annyi független oszlopot, mint amennyi a mátrix rangja!

2. Számítsuk ki az $f : (x, y, z) \longmapsto (x+y-2z, x+z, 2x+y-z, -x-z)$ leképezés mátrixának a rangját! Hány dimenziós f képtere és magtere? Adjuk meg a képtérnek és a magtérnek egy-egy bázisát!

3. Hogyan változhat a mátrix rangja, ha

a) egy sorának minden elemét megszorozzuk ugyanazzal a számmal;
b) egy sorának minden eleméhez hozzáadjuk ugyanazt a számot;
c) (négyzetes mátrixra) a főátló minden elemét megszorozzuk ugyanazzal a számmal;
d) a mátrix minden eleméhez hozzáadjuk ugyanazt a számot;
e) transzponáljuk a mátrixot;
f) "tükrözzük" a mátrixot a mellékátlóra?

4. Legyen $f : V \to V$ lineáris leképezés. Mutassuk meg, hogy vagy az igaz, hogy $V = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$, vagy az, hogy f^2 rangja kisebb f rangjánál!

5. Ha A $n \times n$-es mátrix, amelyre $A^2 = 0$, akkor mekkora lehet A rangja?

6. Legyen A az az $n \times n$-es mátrix, amelynek főátlójában csupa 0, mindenhol máshol csupa 1-es áll. Adjuk meg az A mátrix rangját, ha $\mathbb{Q}$ fölötti, illetve ha $\mathbb{Z}_2$ fölötti mátrixnak tekintjük!

7. Legyen A egy 10×10-es valós mátrix. Jelölje r_i az A^i mátrix rangját. Lehet-e az $(r_1, r_2, \dots)$ sorozat egyenlő az alábbiakkal?

a) $(5, 6, \dots,)$; b) $(9, 8, 7, \dots, 4, 4, \dots)$; c) $(10, 9, 8, \dots)$; d) $(8, 5, \dots)$;
e) $(8, 7, 5, \dots)$; f) $(7, 5, 5, 4, \dots)$; g) $(8, 6, 4, 3, 3, \dots)$?

8. Bilineáris-e az f leképezés, ha

a) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$;
b) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x$;
c) $f(\varphi, \psi) = \varphi \circ \psi$ a valós függvények terén;
d) a c)-beli leképezés a valós lineáris függvények terén;
e) $f(\varphi, \psi) = \varphi(2) \cdot \psi(3)$, ahol φ és ψ valós együtthatós, legföljebb másodfokú polinomok.

Adjuk meg a fönti leképezések közül a bilineáris függvényeknek mátrixát is!

9. Adjuk meg a $B((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_2$ bilineáris függvény mátrixát a standard bázisban, és az $\{(1, 1), (0, 1)\}$ bázisban is. Adjuk meg a B-hez tartozó kvadratikus alakot. Döntsük el, hogy B pozitív (szemi)definit, negatív (szemi)definit, vagy indefinit!

10. Hozzuk diagonális alakra a következő kvadratikus alakokat! Döntsük el, vajon pozitív, negatív definitek vagy indefinitek!

a) $x_1^2 + x_1x_2$; b) x_1x_2; c) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$.