1. Mutassuk meg, hogy az alábbi (valós) mátrixok mind hasonlók:

a) $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

b) $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ d & 1 \end{bmatrix}$, ahol a, b, c és d tetszőleges nem 0 értékek;

c) $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}$, ahol $a \neq c$ tetszőleges, egymástól különböző értékek;

d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Legyen V a legföljebb 6-odfokú valós polinomok tere, és $f : p(x) \mapsto xf'(x)$ egy lineáris transzformáció. Adjuk meg f mátrixát a standard bázisban! Határozzuk meg f sajátértékeit és sajátvektorait!

3. Tegyük föl, hogy egy A 5×5-ös valós mátrixra létezik olyan $\mathbf{v}$ nem nulla valós vektor, melyre $\mathbf{v}, A\mathbf{v}, A^2\mathbf{v}$ és $A^3\mathbf{v}$ lineárisan összefüggők. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^5$-nek van nem triviális, A-ra nézve invariáns altere.

4. Lássuk be, hogy ha $AB = BA$, akkor A sajátalterei invariáns alterei B-nek.

5. Lássuk be, hogy ha $AB = BA$, ahol A és B komplex együtthatós mátrixok, akkor A-nak és B-nek van közös sajátvektora.

6. Mutassuk meg, hogy bármely 3×3-as valós mátrixnak van valós sajátvektora.

7. Melyek igazak egy V vektortér minden f lineáris transzformációjára?

a) $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek;
b) $\mathbf{v}$ sajátvektora f^2-nek $\Rightarrow$ $\mathbf{v}$ sajátvektora f-nek;
c) 0 sajátértéke f^2-nek $\Rightarrow$ 0 sajátértéke f-nek;
d) ha $\mu^2 = \lambda$, és λ sajátértéke f^2-nek, akkor μ vagy $-\mu$ sajátértéke f-nek.

8. Legyen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris. Tegyük föl, hogy az alábbi öt állítás közül pontosan egy nem igaz. Melyik lehet az?

a) $\dim(\operatorname{Im} f) < 2$.
b) f-nek van sajátvektora.
c) $f^2 = f$.
d) A 0 sajátértéke f-nek.
e) $\mathbb{R}^2$-nek van olyan $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ bázisa, hogy $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b}) = \mathbf{a}$.

9. Lássuk be, hogy egy V vektortérnek azon lineáris transzformációi, amelyeknek minden nem nulla vektor sajátvektora, vektorteret alkotnak. Hány dimenziós ez a vektortér?

10. Milyen kapcsolat van AB és BA minimálpolinomjai között, ha A és B négyzetes mátrixok? Lássuk be, hogy AB és BA sajátértékei megegyeznek!

11. Adjunk meg olyan mátrixot, amelynek karakterisztikus polinomja $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$.

12. Van-e olyan 3×3-as mátrix $\mathbb{Q}$ fölött, amelynek minimálpolinomja

a) $x^2 - 2$;
b) $x^2 + x$?

13. Tegyük föl, hogy egy A komplex együtthatós mátrixra teljesül az $A^m = I$ azonosság valamilyen $m \geq 1$ esetén. Igazoljuk, hogy A diagonalizálható.