1. Döntsük el, igazak-e az alábbi állítások! Amelyik igaz, azt röviden indokoljuk, amelyik nem, arra adjunk ellenpéldát!

a) $\mathbb{Z}[x]$ minden irreducibilis polinomja $\mathbb{Q}[x]$-ben is irreducibilis.

b) Ha U és W a V vektortér két altere, amelyekre $\dim U + \dim W = \dim V$, akkor $V = U \oplus W$.

c) Ha φ lineáris transzformáció a V vektortéren, akkor φ lineárisan összefüggő vektorokat lineárisan összefüggő vektorokba visz.

d) Egy unitér lineáris transzformáció négyzete is unitér.

e) Ha $\det A = i$, akkor az A mátrix nem lehet önadjungált.

f) Ha egy A mátrix oszlopainak összege $\mathbf{0}$, és B hasonló A-hoz, akkor B oszlopainak összege is $\mathbf{0}$.

2. Az A komplex elemű mátrix karakterisztikus polinomja $(x-1)^3(x+2)$, minimálpolinomja pedig $(x-1)^2(x+2)$. Mi lehet A Jordan-féle normálalakja?

3. Határozzuk meg az alábbi mátrix minimálpolinomját:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

4. Legyenek $\mathbf{a}_1 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{a}_2 = (0,-1,2,1)$ és $\mathbf{a}_3 = (2,1,2,1)$ az $\mathbb{R}^4$ vektorai.

a) Válasszuk ki az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok közül az általuk generált altérnek egy bázisát!

b) Adjuk meg ugyanennek az altérnek egy ortogonális bázisát is!

5. Döntsük el, milyen definit a $Q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 4x_1x_3 + x_2^2$ kvadratikus alak!

6. Legyen φ az a lineáris leképezés a legföljebb másodfokú valós polinomok terében, amely a $p(x)$ polinomot az $x \cdot p'(x)$ polinomba képezi (itt $p'(x)$ a $p(x)$ polinom deriváltját jelöli). Írjuk föl φ mátrixát a standard $\{1, x, x^2\}$ bázisban és az $\{x-1, x+1, x^2\}$ bázisban. Határozzuk meg φ magjának és képterének dimenzióját és φ sajátaltereit!

7. a) Határozzuk meg a $p(z) = z^4 + z^2 + 1$ polinom gyökeit!

b) Ábrázoljuk a gyököket a komplex számsíkon!

c) Adjuk meg a gyökök összegét és szorzatát!

8. A p és q paraméterek mely értékére lesz 0, 1 vagy végtelen sok megoldása az alábbi egyenletrendszernek a valós számok körében? Abban az esetben, amikor végtelen sok megoldása van, adjuk is meg az egyenletrendszer megoldásait!

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & pz & = & q \\ x & + & 2y & & & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 3 \end{array}$$

9. a) Mekkora a $p(x) = x^4 + 2x - 2$ polinom gyökei négyzetének az összege?

b) Hányadfokú a $p(x)$ polinom legnagyobb fokú irreducibilis tényezője $\mathbb{Q}[x]$-ben, $\mathbb{C}[x]$-ben, ill. $\mathbb{R}[x]$-ben?