

1. Mutassuk meg, hogy két egymás után következő egész szám szorzata mindig osztható 2-vel, és hogy három egymás után következő egész szám szorzata mindig osztható 6-tal!
2. Mutassuk meg, hogy páratlan szám négyzete 8-cal maradékosan osztva mindig 1-et ad maradékul!
3.
 - a) Igazoljuk az $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ azonosságot, tetszőleges pozitív n egészre!
 - b) Igazoljuk az $a^{2k+1} + b^{2k+1} = (a + b)(a^{2k} - a^{2k-1}b + a^{2k-2}b^2 - \dots - ab^{2k-1} + b^{2k})$ azonosságot is tetszőleges nemnegatív k egészre!
 - c) Bizonyítsuk be, hogy $11^{10} - 1$ osztható 120-szal!
 - d) Bizonyítsuk be, hogy $2^{70} + 3^{70}$ osztható 13-mal!
 - e) Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra $2^{4n+1} + 3$ osztható 5-tel!
 - f) Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra $2^{3n+6} + 3^{4n+2}$ osztható 73-mal!
4. Bizonyítsuk be, hogy ha n pozitív egész, akkor $(n + 1)^n - 1$ osztható n^2 -tel!
5. Tekintsük az $R = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ számhalmazt (gyűrűt), és definiáljuk rajta az oszthatóságot az eddigiekkel analóg módon. Lássuk be, hogy $1 + \sqrt{3}$ osztója $1 + 3\sqrt{3}$ -nak! Keressünk egységeket R -ben!
6. Legyenek a és b egész számok.
 - a) Mutassuk meg, hogy $a \mid b \Rightarrow a^2 \mid b^2$.
 - b) Mutassuk meg, hogy $(a, mb) \mid m(a, b)$ minden m egészre.
 - c) Mutassuk meg, hogy $(a, b)^2 = (a^2, b^2)$.
7.
 - a) Legyenek a és b olyan egészek, amelyeknek a legnagyobb közös osztója 14. Mi lehet ekkor $(3a + 2b, 4a + 3b)$ értéke?
 - b) Legyenek a és b olyan egészek, amelyeknek a legnagyobb közös osztója 14. Mi lehet ekkor $(a + b, 5a + 3b)$ értéke?
8. Jelölje f_n az n -edik Fibonacci-számot. (Ezt a sorozatot úgy kapjuk, hogy $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ választással alkalmazzuk az $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ rekurziót minden $n \in \mathbb{N}$ -re.) Mennyi f_n és f_{n-1} legnagyobb közös osztója?
9.
 - a) Osszuk el az $x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ polinomot maradékosan az $x^2 - x + 1$ polinommal!
 - b) Osszuk el az $x^3 - 3$ polinomot maradékosan $2x + 1$ -gyel!
 - c) Számítsuk ki az $x^{18} - 1$ és az $x^{15} + 1$ polinomok legnagyobb közös osztóját!