

1. Bizonyítsuk be, hogy $(a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) = ((a_1, \dots, a_{n-1}), a_n)$ minden $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ -re.
2. Bizonyítsuk be, vagy adjunk ellenpéldát a következő állításokra:
 - a) $(a, b) = 1 \Rightarrow (a + b, ab) = 1$
 - b) $a + b \mid ab \Leftrightarrow a + b \mid (a, b)^2$
 - c) $(a, bc) = (a, b)(a, c)$
 - d) $(a^k, b^k) = (a, b)^k$
 - e) $[a, (b, c)] = ([a, b], [a, c])$
3. Hány olyan $a, b \in \mathbb{N}$ pár van, melyre $(a, b) = 12$, és $[a, b] = 240$? Soroljuk föl az összes lehetséges esetet!
4. Tegyük fel, hogy a, b, d pozitív egészek, és $d \mid ab$. Igazoljuk, hogy léteznek olyan x, y pozitív egészek, amelyekre $x \mid a$, $y \mid b$, és $d = xy$. Egyértelmű-e az x, y számpár?
5. Lássuk be, hogy az $R = \{a + b\sqrt{-6} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrűben a $25 = 5 \cdot 5 = (1 + 2\sqrt{-6})(1 - 2\sqrt{-6})$ a 25 két lényegesen különböző felbontása R -beli felbonthatatlanokra. (Útmutatás: Használjuk, hogy $z = a + b\sqrt{-6}$ -ra $\|z\| := |z|^2 = a^2 + 6b^2$ jelöléssel $\|zu\| = \|z\| \cdot \|u\|$.)
6.
 - a) Bizonyítsuk be, hogy két egymást követő pozitív egész szám szorzata nem lehet négyzetszám.
 - b) Lássuk be ugyanezt három egymást követő számra is.
7. Adjuk meg a összes olyan p prímszámot, melyre $p^2 + 2$ is prímszám.
8. Határozzuk meg mindazokat az n természetes számokat, amelyekre:
 - a) $d(n) = n - 1$;
 - b) $d(n) = n - 2$;
 - c) $d(n) = 10$. (Melyik a legkisebb ilyen?)
9. Legyen n pozitív egész. Igazoljuk, hogy az $1, 2, \dots, 2n$ számok közül bármelyik $n + 1$ darabot választjuk is ki, mindig lesz a kiválasztott számok között két olyan, hogy az egyik a másiknak osztója.
10. Egy matematikai vetélkedőn két természetes számot kell kitalálniuk a játékosoknak. Az egyiknek, Szilárdnak megsúgják a két szám szorzatát, Ödönnek pedig a két szám összegét, de ezt nem adhatják tovább egymásnak. A következő párbeszéd hangzik el közöttük:

Szilárd: Nem tudom, mi a két szám.
Ödön: Én sem.
Szilárd: Akkor már tudom.
Ödön: Akkor már én is.
Mi lehet a két szám?
11. Mi a válasz az előző kérdésre, ha feltesszük (és a játékosok is tudják), hogy a két szám különböző?