

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket, ill. egyenlőtlenségeket:
 - a) $\varphi(n) = n - 1$;
 - b) $\varphi(n) = n - 2$;
 - c) $\varphi(5n) = \varphi(n) + 4n$;
 - d) $n - \varphi(n) \geq \sqrt{n}$.
2. Bizonyítsuk be, hogy $d(n) + \varphi(n) \leq n + 1$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ -re, és itt végtelen sok n -re egyenlőség áll.
3. Legyen n és k pozitív egész; igazoljuk az alábbiakat:
 - a) $\varphi(n^2) = n \cdot \varphi(n)$.
 - b) Ha $n \mid k$, akkor $\varphi(n) \mid \varphi(k)$.
 - c) $\varphi(nk)\varphi((n, k)) = (n, k)\varphi(n)\varphi(k)$.
4. Legyen p prím, c tetszőleges egész. Mutassuk meg, hogy $c^{p^p} \equiv c \pmod{p}$.
5. Igazoljuk, hogy ha $n > 0$ páratlan egész, akkor $2^{n!} - 1$ osztható n -nel.
6. Legyen p a $10n - 1$ szám egyik prímosztója. Mutassuk meg, hogy $10^{p-2} \equiv n \pmod{p}$.
7. Igazoljuk, hogy tetszőleges a egész számra $1703601900 \mid a^{62} - a^2$.
8. Mutassuk meg, hogy 2001-nek végtelen sok hatványa végződik 2001-re.
9. Bizonyítsuk be, hogy $a^m \equiv a^{m-\varphi(m)} \pmod{m}$ tetszőleges $a, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ esetén.
10. Mi a maradéka $3^{4^{56}}$ -nak, ha maradékosan osztjuk 31-gyel?
11. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:
 - (a) $202x \equiv 157 \pmod{203}$,
 - (b) $309x \equiv 451 \pmod{617}$,
 - (c) $5x \equiv 561 \pmod{1968}$,
 - (d) $105x \equiv 741 \pmod{809}$.