

1. Keressünk olyan x és y egész számokat, amelyekre $581x + 119y = 7$.

Megoldás: Kibővített euklideszi algoritmussal:

$$\begin{array}{rrr} & 581 & 119 \\ 581 & 1 & 0 \\ 119 & 0 & 1 \\ -14 & 1 & -5 \\ 7 & 8 & -39 \end{array}$$

Tehát $x = 8$ és $y = -39$ egy megoldása az egyenletnek.

2. Határozzuk meg azokat az n természetes számokat, amelyekre $\sigma(n) = d(n) + 4$.

Megoldás: Mivel n osztói között van n is, $\sigma(n) \geq d(n) + (n - 1)$, és így $\sigma(n) = d(n) + 4$ -ből $n \leq 5$ következik. 1-től 5-ig ellenőrizve $\sigma(n)$ és $d(n)$ értékét látjuk, hogy csak $n = 4$ (itt $\sigma(n) = 7$ és $d(n) = 3$) és $n = 5$ (itt $\sigma(n) = 6$ és $d(n) = 2$) megoldások.

3. Bizonyítsuk be, hogy 2^n nem osztója $n!$ -nak. Melyek azok az n természetes számok, amelyekre 2^{n-1} osztója $n!$ -nak?

Megoldás: 2 kitevője $n!$ kanonikus alakjában: $\left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{2^2}\right] + \left[\frac{1}{2^3}\right] + \dots + \left[\frac{1}{2^t}\right] \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^t} = n \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^t}\right) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{2^t}\right) < n$ (ahol $2^t \leq n < 2^{t+1}$), így 2^n nem osztója $n!$ -nak. Az is látható ebből, hogy 2^{n-1} csak akkor lehet osztója $n!$ -nak, ha $n - 1 \geq n \cdot \left(1 - \frac{1}{2^t}\right)$, amiből $n \leq 2^t$ következik, és így $2^t \leq n$ miatt $n = 2^t$. Erre az n -re pedig valóban teljesül az oszthatóság: 2^t kanonikus alakjában a 2 kitevője $2^{t-1} + 2^{t-2} + \dots + 2 + 1 = 2^t - 1$.

4. Oldjuk meg a $25x^{165} + 17x - 3 \equiv 0 \pmod{83}$ kongruenciát!

Megoldás: $x \equiv 0 \pmod{83}$ láthatóan nem megoldás, és $x \not\equiv 0 \pmod{83}$ -ra $x^{82} \equiv 1 \pmod{83}$, és így $x^{164} \equiv 1 \pmod{83}$. Tehát $25x^{165} + 17x - 3 \equiv 25x + 17x - 3 \equiv 42x - 3 \equiv 0 \pmod{83}$. Ekvivalens átalakításokkal ebből:

$$42x \equiv 3 \pmod{83}$$

$$84x \equiv 6 \pmod{83}.$$

$$x \equiv 6 \pmod{83}$$

5. Legyenek p és q különböző prímszámok. Bizonyítsuk be, hogy $(p+1)^q + (q+1)^p - (p+q+2)$ osztható pq -val.

Megoldás: A kis Fermat-tételt használva modulo p és modulo q :

$$(p+1)^q + (q+1)^p - (p+q+2) \equiv 1^q + (q+1) - (q+2) \equiv 0 \pmod{p} \text{ és}$$

$$(p+1)^q + (q+1)^p - (p+q+2) \equiv (p+1) + 1^p - (p+2) \equiv 0 \pmod{q}.$$

Tehát a kifejezés osztható p -vel és q -val is, és így $(p, q) = 1$ miatt pq -val is.

6. Adjuk meg mindazokat a természetes számokat, amelyekre $\varphi(n)$ osztója n -nek!

Megoldás: Legyen $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ kanonikus alakban, ahol $p_1 < p_2 < \dots < p_r$. Ekkor

$$\varphi(n) = p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\dots p_r^{\alpha_r-1}(p_r-1) \mid p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

ekvivalens a

$$(p_1-1)(p_2-1)\dots(p_r-1) \mid p_1 p_2 \dots p_r$$

oszthatósággal.

Ha n 2-hatvány, akkor az oszthatóság teljesül.

Ha n nem 2-hatvány, akkor $\varphi(n)$ osztható $p-1$ -gyel valamely páratlan prímre, és így $\varphi(n)$, és következésképpen n is páros. Ebből következik, hogy $r \geq 2$, $p_1 = 2$, és $p_2 - 1, \dots, p_r - 1$ mind páros. Viszont $p_1 p_2 \dots p_r$ nem osztható 4-gyel, így $r = 2$, és $p_2 - 1 \mid p_1 p_2$ -ből $(p_2 - 1, p_2) = 1$ miatt $p_2 - 1 \mid 2$ következik, tehát $p_2 = 3$, és ekkor teljesül is az oszthatóság. Tehát azok a $\varphi(n) \mid n$ feltételt $n = 2^\alpha 3^\beta$ alakú számok elégítik ki, ahol $\alpha, \beta \geq 0$, és $\alpha = 0$ esetén $\beta = 0$.

7. Bizonyítsuk be, hogy minden k természetes számhoz van k egymást követő szám, amelyek közül egyik sem prímszám.

Megoldás:

$$((k+1)!)^2 + 2, ((k+1)!)^2 + 3, \dots, ((k+1)!)^2 + (k+1)$$

ilyen számok, ugyanis $2 \leq a \leq k+1$ -re

$$((k+1)!)^2 + a = a \left(\left(\frac{(k+1)!}{a} \right)^2 \cdot a + 1 \right),$$

ahol $\frac{(k+1)!}{a}$ egész, mert a szerepel $(k+1)!$ tényezői között, és $\left(a, \left(\frac{(k+1)!}{a} \right)^2 \cdot a + 1 \right) = 1$, tehát mindegyik számnak legalább két különböző prímosztója van.