

1. Keressük meg a legnagyobb közös osztót az euklideszi algoritmus segítségével:
a) $(7469, 2464)$; b) $(2947, 3997)$; c) $(1109, 4999)$.
 2. A kibővített euklideszi algoritmus segítségével keressünk olyan x és y egészeket (ha léteznek), amelyekre
a) $423x + 198y = 9$;
b) $71x - 50y = 1$;
c) $133x + 217y = 4$;
 3. a) Osszuk el az $x^4 - 3x^2 + 2x - 1$ polinomot maradékosan az $x^2 - x + 1$ polinommal!
b) Osszuk el az $x^3 - 3$ polinomot maradékosan $2x + 1$ -gyel!
c) Számítsuk ki az $x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 - 2$ és az $x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ polinomok legnagyobb közös osztóját!
 4. Bizonyítsuk be, hogy az $x^n - 1$ és $x^m - 1$ polinomok legnagyobb közös osztója $x^{(n,m)} - 1$.
 5. Írjuk föl az $a(x) = x^9 + 1$ és $b(x) = x^4 + x^2 + 1$ polinomok legnagyobb közös osztóját $a(x)p(x) + b(x)q(x)$ alakban alkalmas $p(x)$ és $q(x)$ polinomokkal.
 6. Hány olyan legfőljebb 10 jegyű pozitív egész n van, amelyre $[\sqrt{n}] \mid n$?
 7. Bizonyítsuk be, hogy az $a \neq b$ egész számokhoz végtelen sok olyan egész n szám van, amelyre $(a + n, b + n) = 1$.
 8. Bizonyítsuk be, hogy az $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ rekurzióval definiált Fibonacci-számokra $(f_n, f_m) = f_{(n,m)}$.
 9. Mutassuk meg, hogy az f_{n+1} és f_n Fibonacci-számok legnagyobb közös többszörösének kiszámításakor az euklideszi algoritmus n lépésben ér véget, de ha $0 < b < a$ egészek, és $b < f_n$, akkor (a, b) kiszámításánál az algoritmus n -nél kevesebb lépésből áll. (Azaz, a Fibonacci-számokra a leglassabb az algoritmus.)
- Hf1.** Bizonyítsuk be (prímfaktorizáció nélkül!), hogy $(a^2, b^2) = (a, b)^2$.
- Hf1.** Keressünk olyan x, y egész számokat, amelyekre $93x + 81y = 3$.
- Hf2.** Keressük meg azokat az x egész számokat, amelyekkel $\frac{x^3 + 3}{x - 2}$ egész szám.