

1. Bizonyítsuk be, vagy adjunk ellenpéldát a következő állításokra:
 - a) $(a, b) = 1 \Rightarrow (a + b, ab) = 1$
 - b) $(a, bc) = (a, b)(a, c)$
 - c) $(a^k, b^k) = (a, b)^k$
 - d) $[a, (b, c)] = ([a, b], [a, c])$
 2. Hány olyan $a, b \in \mathbb{N}$ pár van, melyre $(a, b) = 12$, és $[a, b] = 240$? Soroljuk fel az összes lehetséges esetet!
 3. Tegyük fel, hogy a, b, d pozitív egészek, és $d \mid ab$. Igazoljuk, hogy léteznek olyan x, y pozitív egészek, amelyekre $x \mid a$, $y \mid b$, és $d = xy$. Egyértelmű-e az x, y számpár?
 4.
 - a) Bizonyítsuk be, hogy két egymást követő pozitív egész szám szorzata nem lehet négyzetszám.
 - b) Lássuk be ugyanezt három egymást követő számra is.
 5. Adjuk meg a összes olyan p prímszámot, melyre $p^2 + 2$ is prímszám.
 6. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok $3k - 1$ alakú prímszám van.
 7. Határozzuk meg mindazokat az n természetes számokat, amelyekre:
 - a) $d(n) = n - 1$; b) $d(n) = n - 2$; c) $d(n) = 10$. (Melyik a legkisebb ilyen?)
 8. Határozzuk meg mindazokat az n természetes számokat, amelyekre:
 - a) $\sigma(n)$ páratlan; b) $\sigma(n)$ 2-hatvány; c) $\sigma(n) = n + 1$; d) $\sigma(n) = n + 5$
 9. Legyen n pozitív egész. Igazoljuk, hogy az $1, 2, \dots, 2n$ számok közül bármelyik $n + 1$ darabot választjuk is ki, mindig lesz a kiválasztott számok között két olyan, hogy az egyik a másiknak osztója.
 10. Egy matematikai vetélkedőn két különböző, 2-nél nagyobb természetes számot kell kitálcálniuk a játékosoknak. Az egyiknek, Szilárdnak megsúgják a két szám szorzatát, Ödönnek pedig a két szám összegét, de ezt nem adhatják tovább egymásnak. A következő párbeszéd hangzik el közöttük:

Szilárd: Nem tudom, mi a két szám.
Ödön: Én sem.
Szilárd: Akkor már tudom.
Ödön: Akkor már én is.
Mi lehet a két szám?
- Hf1.** Bizonyítsuk be, hogy $a + b \mid ab \Leftrightarrow a + b \mid (a, b)^2$.
- Hf2.** Tegyük fel, hogy $a^k \mid b^{k+100}$ minden $k \in \mathbb{N}$ -re. Bizonyítsuk be, hogy $a \mid b$.
- Hf3.** Határozzuk meg mindazokat az n természetes számokat, amelyekre $\sigma(n) = n + 8$