

1. a) Bizonyítsuk be, hogy  $2^{2^m} + 1$  és  $2^{2^n} + 1$  relatív prímek  $m < n$  esetén. (Útmutatás: Lássuk be először, hogy  $2^{2^{m+1}} - 1 \mid 2^{2^n} - 1$ .)  
b) Az a) rész eredményét felhasználva adjunk új bizonyítást arra, hogy végtelen sok prím van.
2. Legyen  $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$  egész együtthatós, nem konstans polinom. Bizonyítsuk be, hogy  $p(n)$  nem lehet minden  $n$  természetes számra prím.
3. Bizonyítsuk be, vagy adjunk ellenpéldát:
  - a)  $a \equiv b \pmod{n}$  and  $a \equiv b \pmod{k} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{kn}$ ;
  - b)  $a \equiv b \pmod{n}$  and  $a \equiv b \pmod{k} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{[k, n]}$ ;
  - c)  $a \equiv b \pmod{n} \Rightarrow ka \equiv kb \pmod{kn}$ ;
  - d)  $a^2 \equiv b^2 \pmod{n} \Rightarrow a \equiv \pm b \pmod{n}$ ;
4. Legyen  $b$  egy természetes szám, amelynek 10-es számrendszerbeli felírása  $a_n a_{n-1} \dots a_0$ . Bizonyítsuk be, hogy
  - a)  $b \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n \pmod{3}$ ;
  - b)  $b \equiv a_0 + a_1 + \dots + a_n \pmod{9}$ ;
  - c)  $b \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n \cdot a_n \pmod{11}$ .Adjunk hasonló szabályt a 2-vel, 4-gyel, illetve 7-tel való oszthatóságra, illetve a maradék kiszámítására.
5. Mi a  $4^{4^4}$  szám számjegyei összegének a számjegyeinek az összegének a számjegyeinek az összegének a számjegyeinek az összege?
6. Bizonyítsuk be, hogy  $13 \mid 2^{4n+3} + 3^{3n+4} \cdot 5^{2n+1} \cdot 23^{n+2}$  minden  $n$  természetes számra.
7. Hogyan lehet 40 gramm fémből négy súlyt önteni, hogy azokkal egy kétkarú mérlegen 1 és 40 gramm között bármilyen egész mérőszámú súlyt le lehessen mérni?
8. 2113 és 3137 ugyanazt a maradékot adják egy bizonyos háromjegyű számmal osztva. Mi ez a maradék, és mi lehet a háromjegyű szám?
- Hf1. Legfeljebb hányat lehet kiválasztani  $10^n$  osztói közül, hogy egyik se legyen osztója semelyik másikkal?
- Hf2. Bizonyítsuk be, hogy ha  $m \mid a - b$ , akkor  $m^2 \mid a^m - b^m$ .
- Hf3. Határozzuk meg azokat a  $p$  prímszámokat, amelyekre  $\binom{3p}{p} \equiv -2 \pmod{p}$ .