

1. Melyik m természetes számokra létezik olyan teljes maradékrendszer modulo m , amely
 - a) csupa páratlan számból,
 - b) csupa összetett számból, illetve
 - c) csupa prímszámból áll?
2. Keressük meg mindazon n természetes számokat, amelyekre $\varphi(n)$
 - a) 2; b) 4; c) 14; d) 60; e) $n - 1$; f) $n - 2$.
3. Legyen n és k pozitív egész; igazoljuk az alábbiakat:
 - a) $\varphi(n^2) = n \cdot \varphi(n)$.
 - b) Ha $n \mid k$, akkor $\varphi(n) \mid \varphi(k)$.
 - c) $\varphi(nk)\varphi((n, k)) = (n, k)\varphi(n)\varphi(k)$.
4. Bizonyítsuk be, hogy $a^m \equiv a^{m-\varphi(m)} \pmod{m}$ tetszőleges $a, m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ esetén.
5. Legyen p prím, c tetszőleges egész. Mutassuk meg, hogy $c^{p^p} \equiv c \pmod{p}$.
6. Igazoljuk, hogy ha $n > 0$ páratlan egész, akkor $2^{n!} - 1$ osztható n -nel.
7. Igazoljuk, hogy tetszőleges a egész számra $1703601900 \mid a^{62} - a^2$.
8. Mutassuk meg, hogy 2003-nak végtelen sok hatványa végződik 2003-ra.
9. Mi a maradéka $3^{4^{5^6}}$ -nak, ha maradékosan osztjuk 31-gyel?
10. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:
 - (a) $202x \equiv 157 \pmod{203}$,
 - (b) $309x \equiv 451 \pmod{617}$,
 - (c) $5x \equiv 561 \pmod{1968}$,
 - (d) $105x \equiv 741 \pmod{809}$.
- Hf1.** Milyen n -ekre léteznek olyan $\{a_1, \dots, a_n\}$ és $\{b_1, \dots, b_n\}$ teljes maradékrendszerek, amelyekre $\{a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n\}$ is teljes maradékrendszer?
- Hf2.** Bizonyítsuk be, hogy ha $\varphi(n^2) = \varphi(k^2)$, akkor $n = k$, de a $\varphi(n) = \varphi(k)$ feltételből nem következik, hogy $n = k$.
- Hf3.** Milyen maradékot ad 43-mal osztva az $57^{47^{37}}$ szám?