

1. Bizonyítsuk be, hogy egy p páratlan prímre $\left(\frac{3}{p}\right)$ akkor és csak akkor 1, ha $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$.
 2. Számítsuk ki a következő Legendre-, illetve Jacobi-szimbólumokat:
 - a) $\left(\frac{-9}{37}\right)$
 - b) $\left(\frac{97}{101}\right)$
 - c) $\left(\frac{32}{67}\right)$
 - d) $\left(\frac{101}{103}\right)$
 - e) $\left(\frac{53}{103}\right)$
 - f) $\left(\frac{1234567}{225}\right)$
 - g) $\left(\frac{31}{95}\right)$
 - h) $\left(\frac{589}{1999}\right)$
 - i) $\left(\frac{1113}{11131}\right)$
 3. Melyek megoldhatóak az alábbi kongruenciák közül?
 - a) $x^2 \equiv 66 \pmod{191}$
 - b) $x^2 \equiv 7! \pmod{83}$
 - c) $x^2 \equiv 94! \pmod{101}$
 - d) $x^2 \equiv 30 \pmod{77}$
 4. Legyen p egy $4k + 1$ alakú prím. Számítsuk ki az $\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{3}{p}\right) + \dots + \left(\frac{p-2}{p}\right)$ összeget.
 5. Legyenek $a, m, n > 1$ egész számok, és m, n páratlanok, továbbá tegyük fel, hogy $(a, m) = (a, n) = 1$.
 - a) Bizonyítsuk be, hogy ha $a \equiv 0$ vagy $1 \pmod{4}$, akkor az $m \equiv n \pmod{a}$ kongruenciából következik, hogy $\left(\frac{a}{m}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)$.
 - b) Keressünk olyan a, m, n számokat, melyekre $a \equiv 2$ vagy $3 \pmod{4}$ és $m \equiv n \pmod{a}$, de $\left(\frac{a}{m}\right) \neq \left(\frac{a}{n}\right)$.
 6. Bizonyítsuk be, hogy ha p prím, és $p = a^2 + b^2$, akkor az $x^2 \equiv a \pmod{p}$ és $x^2 \equiv b \pmod{p}$ kongruenciák közül legalább az egyik megoldható.
 7. Bizonyítsuk be, hogy az $x^4 - x^2 + 1$ polinom irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött, de reducibilis $\mathbb{Z}_p$ fölött minden p prímre!
 8. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:
 - a) $x^2 \equiv 17 \pmod{83}$
 - b) $x^2 - 4x + 5 \equiv 0 \pmod{61}$
 - c) $x^2 \equiv 5 \pmod{116}$
 9. Legyen p páratlan prím, és $(a, p) = 1$. Bizonyítsuk be, hogy ha a kvadratikus maradék modulo p , akkor kvadratikus maradék modulo p^2 is.
- Hf1.** Oldjuk meg a $2x^2 + 3x + 5 \equiv 0 \pmod{101}$ kongruenciát!
- Hf2.** Számítsuk ki az $\left(\frac{1}{p}\right) + \left(\frac{2}{p}\right) + \dots + \left(\frac{p-1/2}{p}\right)$ összeg értékét, ha p egy $4k + 1$ alakú prím.