



BUDAPESTI MŰSZAKI ÉS GAZDASÁGTUDOMÁNYI EGYETEM
MATEMATIKA INTÉZET
SZTOCHASZTIKA TANSZÉK

SZAKDOLGOZAT
**Fraktálos hálózatok és
asszortativitás**

NAGY MARCELL

Témavezetők:

Molontay Roland

Doktorandusz, BME, Sztochasztika Tanszék

Dr. Simon Károly

Tanszékvezető egyetemi tanár, BME, Sztochasztika Tanszék

2016

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	3
1.1. Történeti áttekintés	3
1.2. Definíciók és jelölések	4
1.3. Matematikai modellek	5
1.3.1. Erdős–Rényi-modell	5
1.3.2. Barabási–Albert-modell	5
1.3.3. Watts–Strogatz-modell	6
2. Fraktálos és önhasonló hálózatok	7
2.1. Dobozszámláló módszer	8
2.1.1. Közelítő eljárások	11
2.1.1.1. A CBB algoritmus programkódja	14
2.2. Renormálás	15
2.2.1. A renormálás programkódja	18
3. Asszortativitás	18
3.1. Az asszortativitás mérőszámai	19
3.1.1. Asszortativitási együttható (<i>Assortativity coefficient</i>)	19
3.1.1.1. R korrelációs együttható	23
3.1.2. Szomszédok átlagos fokszáma (<i>Neighborhood connectivity</i>)	24
3.1.2.1. A szomszédok átlagos tulajdonsága	24
4. Fraktálos hálózatok eredete	26
4.1. Asszortativitás mint fraktalitás okozója	27
4.2. Csúcsközöttség és fraktalitás kapcsolata	29
4.3. Fraktálos hálózatok robusztussága	32
4.4. Song–Havlin–Makse-modell	33
4.4.1. A modell konstrukciója	34
4.4.2. HADG-modell	36

4.4.3. Módosított HADG-modell	37
5. Vizsgálatok	39
5.1. Vizsgálatok a Song–Havlin–Makse-modellen	39
5.2. Vizsgálatok a HADG-modellen	40
5.3. Vizsgálatok a módosított HADG-modellen	43
6. Összefoglalás, kitekintés	47

1. Bevezetés

Ebben a fejezetben, az [1] munka alapján rövid áttekintést adunk a hálózatelméletről, bemutatjuk a leghíresebb hálózatmodelleket, továbbá definiáljuk a legfontosabb definíciókat.

Az utóbbi időben egyre felkapottabb kutatási területté vált a hálózatelmélet. A téma népszerűségét az hozta, hogy a valós, mindennapi életben és számos tudományágban is előfordulnak hatalmas és összetett hálózatok, mint például az informatika világában (WWW, Internet [2]), szociológiában (társadalmi kapcsolatok [3]) pszichológiában, biológiában (sejtek vagy fehérjék közötti kölcsönhatáshálózat [4, 5]) továbbá a gazdaságtudományban is [6].

Hálózatelméleti kutatások során, alapvető feladat feltérképezni az adott hálózat struktúráját, mert az meghatározza a hálózat tulajdonságait és működését, például egy társadalmi háló topológiája befolyásolja az információk vagy betegségek terjedésének körülményeit a népességben.

A matematikai modellek bevezetésére azért van szükségünk, mert a valós hálózatok legtöbb esetben túl nagyok ahhoz, hogy explicit leírást tudjunk róluk adni. Például a Föld népessége meghaladta a hét milliárd főt [7], a World Wide Web mérete több tízmilliárdos nagyságrendű [8], a Humán Genom Projekt harmincezer génről és hárommilliónál több bázispár szekvenciájáról hozott létre adatbankot [9].

1.1. Történeti áttekintés

A hálózatok matematikai modellezése visszanyúlik egészen a késői 1950-es évekre, amikor Erdős Pálnak és Rényi Alfrédnek köszönhetően a véletlen gráfok területe a kutatások középpontjába kerültek [10]. A számítástechnika rohamos fejlődése lehetővé tette a valós hálózatok hatékonyabb vizsgálatát. Barabási Albert-László, magyar származású fizikus, valamint Duncan J. Watts szociológus és Steven Strogatz matematikus kutatásai során az ezredfordulón megjelent korszakalkotó cikkeik, ahhoz a meglepő tényhez vezettek, hogy számos valós hálózat - függetlenül az eredetüktől és funkciójuktól - meg-

egyező strukturális sajátosságokat mutatnak. A két legfontosabb ilyen közös hálózattopológiai jellemvonás a skálamentesség és a kis világ tulajdonság (5. és 6. definíciók), továbbá a természetben fellelhető egyik hálózat fejlődése sem véletlenszerű. Az Erdős Pál és Rényi Alfréd által bevezetett Erdős-Rényi modell és általánosításai nem rendelkeznek ezekkel a sajátosságokkal, ezért nem alkalmasak valós hálózatok modellezésére, így új matematikai modellek bevezetésére volt szükség.

1.2. Definíciók és jelölések

A hálózatokat gráfokkal tudjuk a leghatékonyabban modellezni, ehhez ebben az alfejezetben definiáljuk a legfontosabb hálózat- és gráfelméleti fogalmakat, továbbá bevezetünk jelöléseket, amiket a dolgozat további részében használni fogunk. Feltételezzük, hogy az olvasó rendelkezik gráfelméleti alapfogalmak ismeretével, amihez jó áttekintést nyújthatnak például a következő könyvek: [11, 12].

1. Definíció. Legyen V halmaz és $E \subseteq V \times V$ egy V -n értelmezett kétváltozós reláció, amire teljesül, hogy $\forall u, v \in V : (u, v) \in E \Leftrightarrow (v, u) \in E$. Ekkor a $G = (V, E)$ rendezett párt, a V halmaz feletti irányítatlan gráfnak nevezzük. A V halmazt a $G(V, E)$ gráf csúcshalmazának nevezzük és $V(G)$ -vel jelöljük. Hasonlóan, G élhalmazára a továbbiakban $E(G)$ jelöléssel fogunk hivatkozni.

2. Definíció. Az $u, v \in V(G)$ csúcsok $d(u, v)$ távolsága a G gráfban, az u és v csúcsok között húzódó, (egyik) legrövidebb út hossza. Ha u és v egybeesnek, akkor $d(u, v) = 0$, továbbá ha u és v csúcsok között nincs út, akkor $d(u, v) = \infty$.

3. Definíció. Egy összefüggő G gráf átmérője, a két legtávolabbi csúcsának távolsága, más szóval az összes csúcspár közötti távolságok maximuma, azaz $\text{Diam}(G) = \max_{u, v \in V(G)} d(u, v)$. Ha G nem összefüggő, akkor $\text{Diam}(G) = \infty$.

4. Definíció. A $P(k) = p_k$ fokszámeloszlás, azt a valószínűséget jelöli, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott csúcs k fokszámmal rendelkezik.

5. Definíció. *Egy hálózatot skálamentes hálózatnak nevezünk, ha a fokszám-eloszlása hatványrendet követ, vagyis hatványtörvény szerint viselkedik. [13]. Tehát $P(k)$ a k valamely $\gamma \geq 1$ hatványával arányos, azaz*

$$P(k) \propto k^{-\gamma} \quad (1)$$

A valós hálózatok esetében a γ kitevőre általában $2 < \gamma < 3$ teljesül.

6. Definíció. *A kis világ tulajdonság pedig azt jelenti, hogy a csúcsok közötti távolság relatíve kicsi a hálózat méretéhez képest, pontosabban bármely két csúcs közötti l távolság, arányos a hálózat méretének logaritmusával [14], azaz*

$$l \propto \log|V|. \quad (2)$$

1.3. Matematikai modellek

1.3.1. Erdős–Rényi-modell

Az Erdős–Rényi-modell egy véletlen gráfot hoz létre. A modellnek két szorosan összefüggő változata van:

- A $G(n, m)$ modell, egyenletes eloszlás szerint választ egy gráfot, az összes n csúcsú és m élű gráf közül.
- A $G(n, p)$ modellben kezdetben van egy n csúcsú üresgráf, majd minden csúcspárt, egymástól függetlenül p valószínűséggel összekötünk [10].

1.3.2. Barabási–Albert-modell

A modell bevezetését a fent említett közös hálózattopológiai tulajdonságok motiválták [13]. A Barabási–Albert-modell, egy időben fejlődő, azaz minden lépésben növekvő gráfot hoz létre, szemben az Erdős–Rényi modellel, ahol a gráf mérete egy előre adott paraméter. A modell konstrukciója mögött az az elv húzódik meg, hogy a világunkban található hálózatok nem egyenlőségre törekvők, más szavakkal: "aki gazdag, még gazdagabb lesz", például ha

egy közösséghez csatlakozik egy újonnan érkező ember, akkor nagyobb valószínűséggel ismerkedik meg, barátkozik meg egy népszerű, szociálisan aktív személlyel, akinek sok ismerőse, barátja van, mint akinek kevesebb. Gráfelméleti kifejezésekkel, egy új csúcs nagyobb valószínűséggel lesz szomszédja egy olyan csúcsnak, amelyiknek nagyobb a fokszáma, mint egy olyan csúcsnak, amelyiknek kisebb a fokszáma.

A modell heurisztikus konstrukciója tehát a következő:

- Kezdetben van egy adott, kis (m_0) méretű üres G_0 gráf.
- Fejlődés közben, az i . lépésben hozzáadunk G_i gráfhoz egy új v csúcsot, és összekötjük $m \leq m_0$ darab, már létező csúccsal.
- Preferenciális kapcsolódás: Annak a valószínűsége, hogy az i . lépésben egy új $v \in V(G_i)$ és egy már létező $u \in V(G_{i-1})$ csúcs között lesz él:

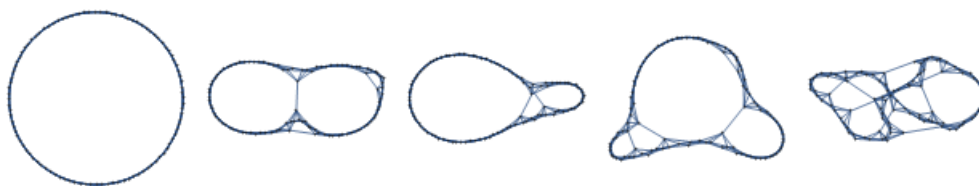
$$P_u^i = \frac{\deg(u)}{\sum_{w \in V(G_i)} \deg(w)} = \frac{\deg(u)}{2|E(G_i)|} \quad (3)$$

1. Megjegyzés. *Ahogy említettem, ez a konstrukció matematikailag nem teljesen precíz, hiszen kezdetben nincs egy darab él sem, így nulla valószínűséggel kötnénk össze az (m_0+1) . jövevény csúcsot, a már meglévő csúcsokkal. Bollobás Béla, magyar matematikus, tette a modell konstrukcióját matematikailag pontosná [15].*

1.3.3. Watts-Strogatz-modell

A modell bevezetését a kis világ tulajdonság motiválta [14]. A Watts–Strogatz-modell (egydimenziós alakja) a következőképpen épül fel:

- Kezdetben van egy n hosszú (C_n) kör, amit kibővítünk új élekkel úgy, hogy minden csúcs szomszédságban álljon a tőle legfeljebb k távolságra lévő csúcsokkal, ahol $k \geq 1$ előre adott paraméter.
- Majd egy előre adott p valószínűséggel, egymástól függetlenül minden él végpontját, egy másik csúcsra cseréljük.



1. ábra. Illusztráció a Watts–Strogatz-modell konstrukciójára. A képet a Wolfram *Mathematica* program segítségével készítettem.

2. Fraktálos és önhasonló hálózatok

A következő fejezetben a [1]-es munkát követve áttekintést adunk a fraktálos hálózatok fogalmáról és azokat jellemző tulajdonságokról.

A XX. században a fraktálok egyre népszerűbb kutatási területé váltak [16], hiszen a matematikán kívül más tudományágakban is léteznek fraktálos jelenségek, mint például a fizikában [17], kémiában [18], kozmológiában [19] de még a tőzsdei folyamatokban is [20]. Az önhasonlóság valamint a fraktál fogalmát és magát az elnevezést Benoit Mandelbrot vezette be [21], továbbá kiterjesztette a fraktál értelmezését természeti jelenségekre is, így például egy levél erezete [22], tengerpartok [23], hópolyhek [24], felhők [25] vagy akár egy nagyváros metrónálhálózata [26] is mutathat fraktálos struktúrát.

Az előbb említett minták mind geometriai alakzatok (kivéve a metrónálhálózatot), a hálózatelmélet fejlődésével természetesen merült fel a kérdés, hogy vajon a valós hálózatok lehetnek-e fraktálosak illetve önhasonlóak? Az 1. fejezetben bemutattuk a komplex hálózatokat jellemző legfontosabb tulajdonságokat a *kisvilág topológiát* és a *skálamentességet*. Eleinte úgy tűnt, hogy ezek a jellemzők, illetve a fraktalitás és az önhasonlóság ellentmondanak egymásnak és nem lehetnek egyszerre jelen ugyanabban a hálózatban, de az előző évtizedben C. Song, S. Havlin és H. Makse bevezettek a hálózatokra vonatkozóan *fraktálos* és az *önhasonlóság* tulajdonságokra egy-egy heurisztikus fogalmat, és ez alapján megmutatták számos valós hálózatról (például a WWW hálójáról vagy egy sejt fehérjehálózatáról), hogy fraktálosak [27]. Az általuk bevezetett, matematikailag nem pontos definíciók alapján egy há-

lőzatot *fraktálosnak* nevezünk, ha a dobozszámlálás módszerrel, a hálózat teljes lefedéséhez szükséges dobozok minimális száma, a dobozok méretének függvényében hatványrendben cseng le. A dolgozat 2.1 részében alaposan körüljárjuk a dobozszámlálás problémát, illetve ennek segítségével definiáljuk majd a fraktálos hálózatok dimenzióját is.

Azt a hálózatot, aminek a fokszámeloszlása változatlan marad a renormálás alatt, *önhasználó hálózatnak* nevezzük [28]. A renormálási folyamatot a 2.2 alfejezetben fogom ismertetni.

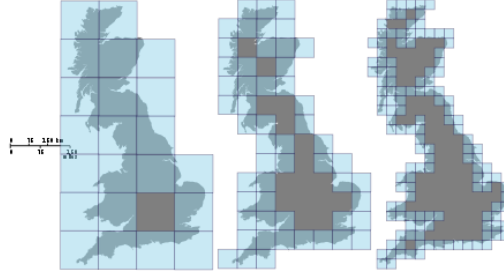
2.1. Dobozszámláló módszer

Ebben az alfejezetben, az előző bekezdésben említett fraktálos hálózatok fogalmához szükséges, dobozszámláló módszert fogom ismertetni.

A hagyományos értelemben vett fraktálok dimenziójának meghatározására, egyik lehetséges módszer a dobozszámlálás. Legyen a fraktál egy n -dimenziós Euklideszi-térbeli H halmaz (lehet általánosítani (M, d) metrikus térre is). Ahhoz, hogy kiszámoljuk ennek a fraktálnak a dobozdimenzióját, képzeljük el, hogy a fraktál egy n -dimenziós rácson fekszik és a négyzetrácsok felelnek meg a dobozoknak. Számoljuk meg, minimálisan mennyi négyzetrács szükséges ahhoz, hogy lefedjük ezt az H halmazt. A dimenzió meghatározásához azt kell megfigyelni, hogy hogyan változik a lefedéshez szükséges dobozok száma, a dobozok méretének függvényében [29]. A 2. ábrán látható a dobozszámlálásra egy példa Nagy-Britannia tengerpartjának körvonalán. Nagy-Britannia fraktálos partvonalával illetve annak hosszának kiszámításával Benoit Mandelbrot foglalkozott először [23].

Legyen a fedéshez szükséges ε méretű dobozok minimális száma N_ε . Ekkor a H fraktál dobozdimenzióját a következőképpen definiáljuk [16]:

$$\dim_{\text{doboz}}(H) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon(H)}{\log(1/\varepsilon)} \quad (4)$$



2. ábra. Illusztráció a dobozdimenzió számolására, Nagy-Britannia tengerpartjának fraktálos körvonalán. A kép forrása: [33]

A dobozdimenziónak efféle meghatározása Hermann Minkowski és Georges Bouligand matematikusok nevéhez fűződik, ezért gyakran Minkowski—Bouligand-dimenzióként hivatkoznak rá. A fraktálok dimenziójának másik, elterjedtebb meghatározási módszerét Hausdorff dolgozta ki [30, 31, 32].

A hálózatelméletben a dobozdimenzió számolása hasonlóképpen alakul [34]. Legyen adott egy G gráf és egy $l_B \in \mathbb{N}$ dobozméret. Particionáljuk G csúcsait úgy, hogy egy l_B méretű doboznak egy $B \subseteq V(G)$ csúcshalmaz felel meg, aminek bármelyik két eleme közötti távolság hossza kisebb mint l_B . Másképp fogalmazva, egy l_B méretű doboz csúcsai által kifeszített részgráf átmérője legfeljebb $l_B - 1$. A G lefedéshez szükséges dobozok minimális számát N_B -vel jelöljük és mivel ez a szám nyilvánvalóan függ a dobozok méretétől, ezért l_B méretű dobozok esetén erre a mennyiségre $N_B(l_B)$ -ként fogunk hivatkozni. Például $l_B = 1$ esetén, N_B megegyezik az adott hálózat méretével ($|V(G)|$). Viszont $N_B = 1$, ha $l_B \geq l_B^{max}$, ahol $l_B^{max} = \max_{u,v \in V(G)} d(u, v) + 1$, azaz hálózat átmérője plusz egy.

A 2. fejezet bevezetésében megemlítettem, hogy egy hálózatot fraktálosnak nevezünk, ha a dobozszámlálással kapott $N_B(l_B)$ hatványrendben cseng le l_B függvényében. Azaz

$$N_B(l_B) \approx l_B^{-d_B} \quad (5)$$

2. Megjegyzés. *A tudományos kutatások számos területén előfordul, hogy az empirikus adatok látszólag hatványredbe eloszlást követnek. A [35] cikkben megmutatják, hogy ezt a fogalmat (mint például a fraktális hálózatok heurisztikus definícióját), hogyan lehetne statisztikai módszerekkel matematikailag pontosá tenni. Az eljárásuk során a tapasztalati és elméleti eloszlás összehasonlítására Kolmogorov-Szmirnov-próbán alapuló statisztikai tesztet használnak.*

Egy hálózat dobozdimenziója (d_B) azt mutatja meg, hogy ez a lecsengés mennyire gyors. Tehát a dobozdimenziót a (5)-ből a következőképp tudjuk definiálni:

$$d_B(G) \approx \frac{\log(N_{l_B}(G))}{\log(1/l_B)}, \quad (6)$$

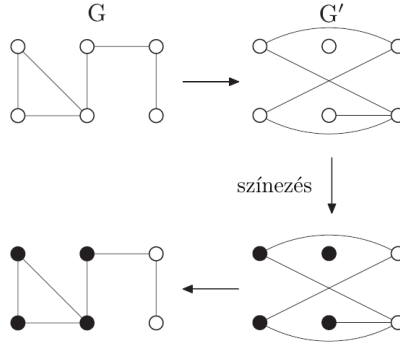
feltéve, hogy $l_B > 1$.

A dobozszámlálást közvetlenül vissza lehet vezetni, a gráfelmélet egyik leghíresebb NP-nehéz problémájára, a gráf színezésre [36], ezzel a dobozszámlálás probléma is NP-nehéznek bizonyult [37] (lásd: 1. tétel). Ez azt jelenti, hogy nem tudunk megadni olyan algoritmust, ami viszonylag rövid időn belül meg tudná adni a pontos megoldást, viszont rengeteg közelítő eljárás létezik, amelyek közös célja megkeresni $N_B(l_B)$ minimális értékét minden lehetséges l_B esetén. Ezen módszerek közül néhányat alaposan be fogok mutatni a dolgozat későbbi részében.

1. Tétel. *A dobozszámlálás NP-nehéz probléma.*

Bizonyítás. A bizonyítás előbb említett redukáláson alapul, amivel meg tudunk adni a dobozszámlálásra egy módszert.

A visszavezetés a következőképpen történik: legyen adott egy G gráf. Ahhoz, hogy egy adott l_B ismeretében megkapjuk az optimális megoldását az $N_B(l_B)$ értékének, először konstruáljuk meg G -nek egyfajta G' duálisát, ahol $u, v \in V(G')$ csúcspár között akkor, és csak akkor fut él, ha a G gráfban $d(u, v)$, azaz u és v közötti távolság, nagyobb vagy egyenlő mint l_B . A 3. ábrán látható erre egy példa $l_B=3$ paraméter választásával. Ezután megadjuk a

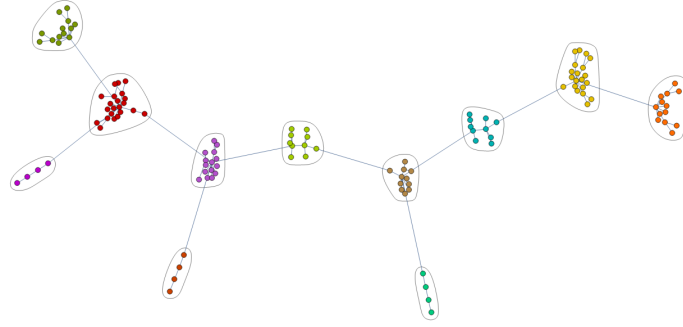


3. ábra. Illusztráció a dobozsámolás gráfszínezésre való visszavezetésére. A kép forrása: [34]

G' gráfnak egy jó színezését, azaz minden csúcshoz hozzárendelünk pontosan egy színt úgy, hogy bármelyik két szomszédos csúcs színe nem lehet azonos. Az így kapott színosztályok megfelelnek egy-egy doboznak a G gráfban [34]. Ez az eljárás jó, hiszen azok a csúcsok, amelyek azonos színűek, kisebb, mint l_B távol vannak egymástól G -ben, hiszen ha legalább l_B távol lennének, akkor G' -ben össze lennének kötve és a színezéskor különböző színeket kaptak volna, ami ellentmondáshoz vezet. Másképp fogalmazva, ha G -ben u és v közötti távolság nagyobb mint l_B , akkor nem tartozhatnak egy dobozba. G' gráf megkonstruálásakor u és v csúcsok között közvetlen él fog futni, így nem lehetnek azonos színűek G' színezésekor. Mivel különböző színűek, ezért különböző színosztályokba, dobozokba fognak tartozni. Fordítva, ha G -ben u és v közötti távolság kisebb, mint l_B , akkor lehetséges, hogy ezek a csúcsok egy dobozba fognak esni. G' -ben u és v között nem fut él, így megengedett hogy a színezéskor azonos színt kapjanak, azaz ugyanabba a dobozba tartozzanak. Így tehát $N_B(G)$ megegyezik G' kromatikus számával ($\chi(G')$), azaz a G' jó színezéséhez felhasznált színek minimális számával. $\square$

2.1.1. Közelítő eljárások

Adott G gráf esetén, az egyik leghatékonyabb közelítő módszert a dobozsámolásra úgy kaphatjuk, hogy az 1. tétel bizonyításában leírtakat követjük és



4. ábra. A dobozszámlálás illusztrálása, $l_B = 4$ méretű dobozokkal. A képet a Wolfram *Mathematica* program segítségével és a 2.1.1.1 alfejezetben leírt CBB algoritmus *Mathematica* kódjával készítettem.

a duális G' gráf színezésekor a *mohó színezést* alkalmazzuk. Erről részletesebben többek közt a [38] cikkben lehet olvasni.

A problémának egy másik megközelítésében a színezés helyett, a szélességi bejárást használjuk fel a dobozok kialakításához. Azok az algoritmusok, amik szélességi bejárásra épülnek, úgy működnek, hogy először kiválasztunk egy középponti c csúcsot, ez alkotja a doboz középpontját, és ehhez vesszük fel lépésenként az adott dobozhoz tartozó többi csúcsot, amik mind a c csúcs r_B sugarú környezetéből kerülnek ki, azzal a megszkott feltétellel, hogy bármely kettő csúcs között a távolság kisebb legyen, mint l_B . Az ilyen elven működő eljárásokat angolul *burning* (égető) algoritmusoknak nevezik, mert a szélességi bejárás a tűz terjedéséhez hasonló módon járja be a hálózatot és a középponti csúcsokból kiindulva így haladva kapjuk meg a dobozokat alkotó csúcsokat.

Az eredeti l_B dobozméret a dobozok átmérőjét jelentette, a most bevezetett r_B pedig a dobozok sugarára utal, és a két mérőszám $l_B = 2r_B + 1$ módon függ össze (vannak kivételes esetek amikor ez a viszony nem teljesül, például ha a doboz csúcsai egy kört alkotnak).

A továbbiakban egy dobozt kompaktnak fogunk nevezni, ha a doboz méretére nézve maximális számú csúcsokat tartalmazza, azaz nem létezik olyan dobozon kívüli csúcs a hálózatban, ami része lehetne a doboznak. Valamint egy v csúcs szomszédja egy B doboznak, ha $v \notin B$, és $\exists u \in B$, hogy $(u, v) \in$

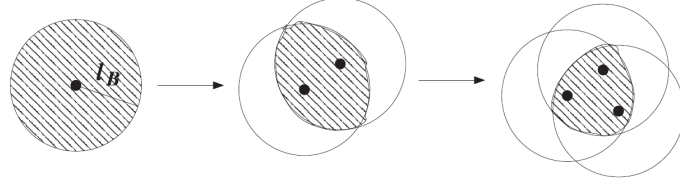
$\in E(G)$, azaz a v csúcsnak van legalább egy B dobozbeli szomszédja.

Az alapötlet egy doboz elkészítéséhez az, hogy kiindulunk a hálózat egy tetszőleges c csúcsából és egyesével választunk csúcsokat a dobozhoz c szomszédságából addig, amíg kompakt nem lesz a doboz. Összefoglalva először minden csúcsot fedetlennek tekintünk, majd:

1. A doboz középpontjának kiválasztunk egy véletlen csúcsot a fedetlen csúcsok közül.
2. Az összes olyan fedetlen csúcsról, ami szomszédja az adott doboznak, megnézzük, hogy kevesebb mint l_B távol vannak-e a doboz összes csúcsától. Azok a csúcsok amelyek teljesítik ezt a feltételt, bekerülnek a dobozba.
3. Addig ismételjük a 2. lépést, amíg kompakt nem lesz a doboz. Ha ezt elértük, akkor a fedetlen csúcsok halmazából kivonjuk a doboz csúcsait.
4. Addig ismételjük az 1., 2. és 3. lépéseket, amíg el nem fogynak a fedetlen csúcsok.

Habár ezt az algoritmust könnyű implementálni, nagyon sok számítási időt igényel. Emiatt most ismertetünk egy másik módszert, ami ugyanezt az eredményt adja, sokkal kevesebb idő alatt. Ennek a neve CBB (compact-box-burning) algoritmus. A CBB működési elvére, a könnyebb érthetőség érdekében, először analógián alapuló geometriai magyarázatot adunk (5. ábra).

Vegyünk egy véletlen C_0 pontot és a C_0 -tól legfeljebb l_B távolságra lévő pontok halmazát a síkon, azaz egy C_0 középpontú l_B sugarú körlapot. A továbbiakban ezt $B_{l_B}^{\mathbb{R}^2}(C_0)$ vagy csak $B_{l_B}(C_0)$ -vel fogjuk jelölni. Ezután válasszunk ki egy véletlen $C_1 \neq C_0$ pontot a $B_{l_B}(C_0)$ körlapból és vegyük a $B_{l_B}(C_1)$ körlapot. A doboz lehetséges pontjai a $B_{l_B}(C_0) \cap B_{l_B}(C_1)$ halmazból fognak kikerülni. Majd a C_2 ($C_2 \neq C_0, C_1$) pontot ebből a metszetből választjuk ki, és vesszük a C_2 ponthoz tartozó körlapot, majd a C_3 ($C_3 \neq C_i, i \in \{0,1,2\}$) pont a $\bigcap_{i=0}^2 B_{l_B}(C_i)$ metszet eleme lesz, és ezt az iterációt folytatva olyan



5. ábra. A CBB algoritmus analógiája egy kétdimenziós euklideszi (vagy metrikus) téren. Kép forrása: [38]

halmazt kapunk, amiben bármely két pont legfeljebb l_B távol vannak egymástól, azaz $\forall C_i, C_j \in \bigcap_{k=0}^{\infty} B_{l_B}(C_i) \subset B_{l_B}(C_0)$, $i \neq j$ esetén, $d(C_i, C_j) \leq l_B$.

Adott G gráf esetén a $B_{l_B}^G(v)$ ($v \in V(G)$) hasonlóan jelentse a v csúcs l_B sugarú környezetében lévő csúcsok halmazát. A CBB algoritmus tehát az előbbi iterációkat hajtja végig, azzal a módosítással, hogy sík helyett egy gráfon van értelmezve ($B_{l_B}^{\mathbb{R}^2}$ helyett $B_{l_B}^G$), és természetesen addig tart az iterálás, amíg találunk új csúcsot a folyamatosan szűkülő metszetben.

Összefoglalva, a CBB algoritmus a következő pontokat hajtja végre [38]:

1. Legyen C a még fedetlen csúcsok halmaza (kezdetben $C = V(G)$).
2. Válasszunk C -ből egy véletlen c csúcsot és vegyük ki C -ből.
3. Töröljünk C -ből minden olyan v csúcsot, amire $d(v, c) \geq l_B$.
4. Ismételjük a 2. és 3. lépéseket, amíg a C halmaz üres nem lesz. Ha ezt elértük, a választott c csúcsok egy kompakt dobozt fognak alkotni.
5. Ismételjük az 1., 2., 3., 4. pontokat, amíg az egész hálózatot le nem fedjük.

2.1.1.1 A CBB algoritmus programkódja

A következő sorokban a 2.1.1. alfejezetben részletezett CBB algoritmus programkódja látható, amit a Wolfram *Mathematica* programnyelven írtam meg. Erre azért volt szükség, mert a *Mathematica*-ban nincsen beépített függvény

a dobozdimenzió számolására és ez elengedhetetlen a 4.4. fejezetben leírt hálózatmodell részletes vizsgálataihoz.

```

CBB[GRÁF_, r_] := Module[{gráf, dobozok, UnCoveredNodes, CoveredNodes},
  gráf = GRÁF;
  UnCoveredNodes = VertexList[gráf];
  dobozok = {};
  While[Length[UnCoveredNodes] != 0,
    Module[{Centernode, VisitedNodes, C, intersection}, (*
      Amíg vannak fedetlen csúcsok (kezdetben minden csúcs fedetlen), addig
      kiválasztunk egy kitüntetett véletlen csúcsot a fedetlenek
      közül, és ez lesz a center csúcs.
      C halmaz:= a center r sugarú környezetébe
      eső, centeren kívüli csúcsok halmaza. *)
      Centernode = RandomChoice[UnCoveredNodes];
      VisitedNodes = {Centernode};
      C = Complement[
        VertexList[
          NeighborhoodGraph[gráf, Centernode, r]], {Centernode}];
      AppendTo[VisitedNodes, RandomChoice[C]];
      intersection =
      Intersection[
      Complement[
        VertexList[NeighborhoodGraph[graff, VisitedNodesS[[-1]], rr]],
      Flatten[{VisitedNodesS[[-1]], dobozokkk}], CC];
      (* intersection:= A C halmaz és a C halmazból egy véletlen csúcs r sugarú kö
        rnyezetébe eső csúcsok halmazának metszete. (Ezekből a környezetekből
        mindig ki kell vonni a környezetek középpontját)
        Mivel az előző parancsban hozzáadtuk a VisitedNodes listához C-beli csúcsot, ezért
        ez csúcs a lista -1. azaz utolsó eleme *)
      While[Length[intersection] != 0,
        AppendTo[VisitedNodes, RandomChoice[intersection]]; (*
          Amíg az intersection halmaz nem üres, addig a metszetből kiválasztunk egy véletlen
          csúcsot és hozzáadjuk a VisitedNodes listához, majd az intersection-t felülről
          rjuk úgy, hogy elmetsszük az intersection-t az új véletlen csúcs r sugarú kö
          rnyezetébe eső csúcsok halmazával, és ez a metszet lesz az új intersection. *)
          intersection =
          Intersection[intersection,
          Complement[
            VertexList[NeighborhoodGraph[graff, VisitedNodesS[[-1]], rr]],
            Flatten[{VisitedNodesS[[-1]], dobozokkk}], ]];
          (*Ha már nincs az intersection halmazban több elem, akkor a dobozok nevű listá
            hoz hozzáadjuk, az eddig folyamatosan bővülő VisitedNodes listát. Amikor a
            külső ciklus egyszer végig fut, akkor a ciklus végén ez a VisitedNodes
            lista megfelel egy doboznak. A dobozok pedig ezeknek a dobozoknak a listá
            ja lesz. Végezetül pedig ez a dobozok nevű lista lesz a program kimenete
            *)
          AppendTo[dobozok, VisitedNodes];
          UnCoveredNodes = Complement[UnCoveredNodes, VisitedNodes];
          VisitedNodes = {};
          intersection = {}];
      dobozok]
  
```

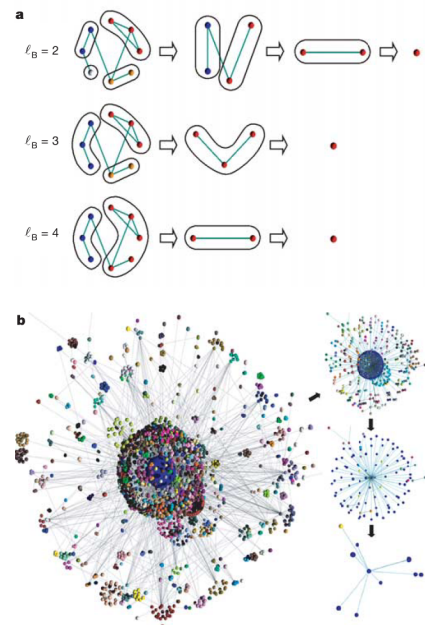
2.2. Renormálás

A 2. fejezet bevezetésében ismertettük az önhasználó hálózat fogalmát, aminek megértéséhez szükséges a renormálási folyamat ismerete. Emlékeztetőül: C.

Song, S. Havlin és H. Makse önhasonló hálózatnak olyan hálózatot tekintettek, aminek a fokszámeloszlása változatlan marad a renormálás alatt [28]. Ez a fogalom persze matematikailag egyáltalán nem pontos, sőt a renormálásra egyik hálózat fokszámeloszlása sem lehet invariáns, a hálózat folyamatos zsugorodása miatt. Természetesen arra gondoltak, hogy a foksám-eloszlást leíró görbe marad változatlan a renormálás alatt. Tehát, ha egy G önhasonló gráf fokszámeloszlása hatványrendben cseng le γ kitevő szerint, akkor a G gráfból renormálással kapott G^R gráf fokszámeloszlása is hatványrendben cseng le γ kitevő szerint. Bár ez a megfogalmazás matematikai szempontból még mindig nem pontos. Bővebben az [1] munkában található ennek a kérdésnek az alapos körüljárása. A most következő sorokban a renormálási folyamatot fogjuk ismertetni.

A folyamat lényege, hogy kisebb méretűvé és átláthatóbbá tegyük a komplex hálózatokat úgy, hogy ezalatt megőrizzük a hálózat fő szerkezeti jellemvonásait. A renormálást az önhasonlóság fogalma motiválta azaz hogy bizonyos hálózatok hasonlóan néznek ki, különböző nagyítások alatt [39, 1]. A továbbiakban a különböző nagyítási szinteknek, a renormálási folyamat lépései fognak megfelelni.

A renormálási folyamat minden egyes lépése egy G gráfhöz egy másik $G^{R(l_B)}$ gráfot rendel hozzá. Egy ilyen lépésnél a G gráfon először végrehajtunk egy dobozfedést (lásd: 2.1) egy adott l_B dobozmérettel. Majd ha ezek a dobozok elkészültek, minden dobozt egy-egy

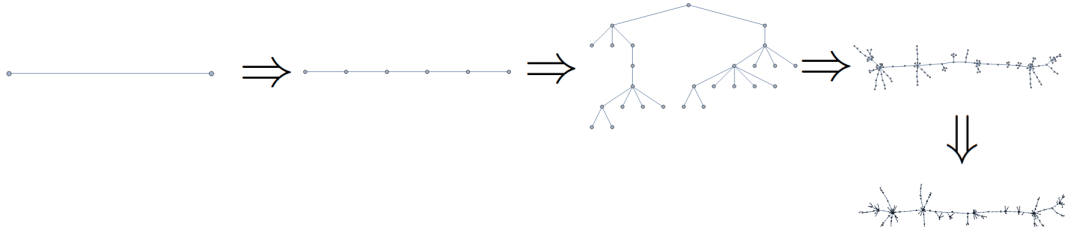


6. ábra. A renormálási folyamat demonstrálása. (a) A renormálás bemutatása kis hálózaton, különböző l_B paraméterekkel. (b) A WWW hálózatának renormálása $l_B = 3$ dobozméret választása esetén. a WWW hálójá önhasonló, azaz a fokszámeloszlása invariáns a renormálásra. Kép forrása: [27]

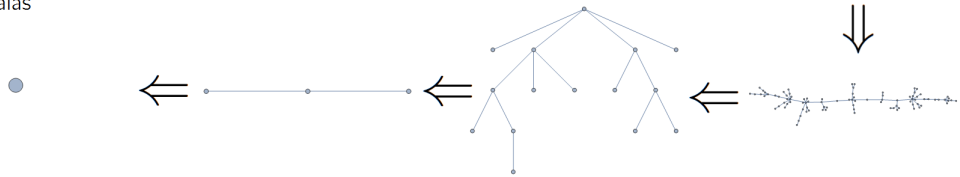
csúccsal reprezentálunk, és ezek között a (renormált doboznak megfelelő) csúcsok között pontosan akkor fut él, ha az általuk reprezentált megfelelő dobozok között fut legalább egy él a G gráfban. Az így kapott renormált G^R gráfra megismételjük ezt az eljárást, egészen addig, amíg a gráf össze nem zsugorodik egy darab csúcsba [27]. A 6. ábrán látható egy-egy példa a renormálási folyamatra.

A hálózateleméleti önhasonlóság, a hagyományos geometriai fraktálok esetével ellentétben, általánosabb jellemzője a hálózatoknak, hiszen a nem fraktálos hálózatok is lehetnek önhasonlóak [39], mint például az Internet (ahol csúcsoknak az útválasztók és számítógépek felelnek meg, éleknek pedig a közöttük futó kábelek).

(a) Hálózat időbeli fejlődése



(b) Renormálás



7. ábra. Illusztráció arra, hogyan lehet a renormálási folyamattal „visszamenni az időben”. (a) A 4.4 fejezetben részletezett SHM hálózatmodell időben való fejlődése. (b) Az (a) ábrán kifejlődött gráfra alkalmazzuk a renormálási folyamatot $l_B = 4$ dobozméret választásával. Az ábrát a Wolfram *Mathematica* program segítségével készítettem, általam megírt renormáló (lásd: 2.2.1) és gráfgeneráló programkódokkal

A renormálás folyamat mellett, hogy áttekinthetővé teszi egy hálózat struktúráját, arra is alkalmas, hogy feltárjuk bizonyos hálózatok a fejlődésé-

nek menetét, nevezetesen a biológiai hálózatokét [39]. Könnyű meggondolni, hogy ha időben fejlődő hálózatra alkalmazzuk a renormálást, akkor ezt a folyamatot tekinthetjük úgy, mintha visszamennénk az időben. A 7. ábrán látható erre egy szemléltető példa, amihez a 4.4. részben leírt hálózatmodellt használtam fel.

2.2.1. A renormálás programkódja

A következő sorokban a renormálási folyamat általam megírt programkódja látható, amit a 7. ábrának elkészítésekor is felhasználtam. A kódban a dobozfedés elvégzéséhez a 2.1.1.1. alfejezetben leírt CBB algoritmus kódot használtam fel.

```
renorms[gr_, lb_] := Module[{újgráf, doboz, gráfok, renorm},
  renorm[Graf_, lb_] := Module[{dobozok},
    dobozok = CBB[Graf, lb]; (* A renorm függvény végrehajt egy dobozfedést a CBB közelítő
    algoritmusával *)
    Fold[VertexContract[#1, #2] &, Graf, dobozok]; (* Majd minden egyes dobozt összehúz
    egy-egy csúcsba *)
    újgráf = gr;
    gráfok = {újgráf};
    While[EdgeCount[újgráf] > 1, AppendTo[gráfok, renorm[újgráf, lb]]; (* Amíg a kapott
    normált gráf mérete nagyobb mint egy, addig haddatjuk rá a renorm függvényt *)
    újgráf = gráfok[[-1]];
    GraphicsColumn[gráfok]]
  ]

```

3. Asszortativitás

Az asszortativitás a gráfok egy mérőszáma, aminek fogalmát Newman vezette be 2002-ben [40], és a mai napig kutatók széles köre foglalkozik ezzel a területtel [41, 42, 43]. Az asszortativitás lényegében azt mutatja meg, hogy egy hálózat adott tulajdonságú csúcsai között milyen gyakran találunk éleket, azaz hogy inkább a hasonló tulajdonságú csúcsok, vagy épp az ellenkező tulajdonságú csúcsok állnak szorosabb összeköttetésben. Például a szociális hálókból tipikus, hogy a csúcsok általában a hozzájuk hasonló tulajdonságú csúcsokkal vannak szomszédságban [44]. Az asszortativitás mértékét leggyakrabban a gráfok csúcsainak fokszámai alapján határozzák meg (fokszámkorreláció). A fokszámon kívül lehet vizsgálni például a csúcsok mag jellegét

(*coreness*), csúcsközöttségét (*node betweenness*), illetve azt is, hogy mennyi az adott csúcsból legfeljebb k lépéssel elérhető csúcsok száma. Ezeken kívül olyan tulajdonságokat is hozzárendelhetünk a csúcsokhoz, amik nem a gráf topológiájából származnak, mint például *súlyokat*, *kapacitásokat* vagy szociális hálók esetében olyan jellemzőket is, ami alapján különböző osztályokba tudjuk sorolni a népeiséget, mint például az egyének jövedelme vagy iskolai végzettsége. A 3.1.2 alfejezetben megmutatjuk, hogyan lehet általánosítani a fokszámkorreláció ötletét, csúcsokhoz rendelt tetszőleges tulajdonságokra.

A ρ asszortativitás egy skalármennyiség, ami tetszőleges értékeket vehet fel, a $[-1, 1]$ intervallumból (lásd: 3.1). Ha egy adott G gráfra a ρ értéke pozitív, akkor G -t asszortatívnak, valamint ha ρ negatív, akkor G -t diszasszortatívnak nevezzük. A $\rho = 0$ esetre azt mondjuk, hogy a gráf korrelálatlan. Például, ha az asszortativitást a foksámok alapján számítjuk (ρ_D), akkor a ρ_D szerint asszortatív gráfokban a magasabb foksámú csúcsok általában magas foksámú csúcsokkal, az alacsony foksámú csúcsok pedig általában alacsony foksámú csúcsokkal állnak kapcsolatban. Diszasszortatív esetben pedig általában a nagy foksámú csúcsok kölcsönösen kis foksámú csúcsokkal vannak szomszédságban. Ebből kifolyólag az asszortativitás hordoz némi információt az adott hálózat felépítésének szerkezetéről.

3.1. Az asszortativitás mérőszámai

3.1.1. Asszortativitási együttható (*Assortativity coefficient*)

Az asszortativitás eredeti definíciója (lásd: [40]) a valószínűségi változók közötti (Pearson-féle) lineáris korreláció koncepcióján alapszik.

7. Definíció. *Legyenek X és Y valószínűségi változók, rendre μ_X , μ_Y várható értékekkel és σ_X , σ_Y szórásokkal. Ekkor X és Y korrelációja a következő képlettel számítható:*

$$\rho_{X,Y} = \text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y} =$$

$$= \frac{\mathbb{E}[XY] - \mu_X \mu_Y}{\sigma_X \sigma_Y} \quad (7)$$

Legyen $G(V, E)$ n csúcsú gráf $D = (d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n)$ fokszámsorozattal. A (7) egyenletből származtatott Newman-féle asszortativitás együtthatója G -nek a következő:

$$\rho_D = \frac{\sum_{j,k} jk(e_{jk} - q_j q_k)}{\sigma_q^2} \quad (8)$$

Ahol

- j és k a megmaradó fokszámokat jelölik (*excess/remaining degree*), vagyis $j = d(v) - 1$ ($v \in V(G)$)
- e_{jk} annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott él két végpontján j és k megmaradó fokszámú csúcsok vannak. Mivel $e_{jk} : D^2 \rightarrow \mathbb{R}$ valószínűségi mérték, ezért $\sum_{j,k} e_{jk} = 1$
- q_k a D fokszámsorozattal megadott *konfigurációs modell* (9. definíció) megmaradó fokszámeloszlása lenormálva. $q_k = \frac{(k+1)p_{k+1}}{\sum_j jp_j}$ (lásd: 3. tétel)
 q_k és e_{jk} között a következő kapcsolat áll fenn a konfigurációs modellben: $\sum_j e_{ij} = q_i$, valamint $e_{ij} = q_i q_j$ [44]. Azaz q_k annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott él, egyik végpontján k fokszámú csúcs van.
- σ_q a q_k eloszlásának szórását jelöli, azaz $\sigma_q^2 = \sum_k k^2 q_k - \left(\sum_k k q_k \right)^2$.

Összefoglalva, az asszortativitási együtthatót a Pearson-féle korrelációs együtthatóval számoljuk, úgy hogy X és Y valószínűségi változókat, egy véletlenszerűen kiválasztott él két végpontjának megmaradó fokszámának feleltetjük meg. A v_i, v_j csúcsok d_i, d_j fokszáma helyett azért a megmaradó fokszámot használjuk, mert abból indulunk ki, hogy v_i és v_j még nincsenek összekötve, azaz ekkor még $d_i - 1$ és $d_j - 1$ fokszámuk van.

8. Definíció. Egy $G(V, E)$ gráf $(d_i)_{i=1}^n$ fokszámsorozata, a G csúcsainak fokszámainak sorozata, nemnövekvő sorrendben felírva, azaz $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots \geq d_n$.

9. Definíció. A konfigurációs modell egy adott fokszámsorozattal rendelkező véletlen gráfot hoz létre. Tehát egy véletlen függvény, aminek a bemenete egy $(d_i)_{i=1}^n = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{N}^n$ természetes számokból álló nemnövekvő sorozat ($d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots \geq d_n$), amire teljesül hogy, $\sum_i^n d_i$ páros. A konfigurációs modell a $(d_i)_{i=1}^n$ sorozathoz hozzárendel egy n csúcsú (nem feltétlenül egyszerű) véletlen K gráfot úgy, hogy a $v_1, v_2, \dots, v_n$ csúcsokhoz rendre kioszt $d_1, d_2, \dots, d_n$ darab féléleket. Majd egyenlő valószínűséggel kiválaszt egy félél párt, és összeköti őket. Ezt az eljárást addig folytatja, amíg vannak szabad félélek. Így az eredményül kapott véletlen K gráf fokszámsorozata $(d_i)_{i=1}^n$.

2. Tétel. A konfigurációs modellben, annak a valószínűsége, hogy a v_i és v_j csúcsok között fut él:

$$P_r(v_i, v_j) = \frac{k_i k_j}{2e - 1} \quad (9)$$

Bizonyítás. Legyen $d(G) = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ az n csúcsból és e élből álló G gráf fokszámsorozata. A konfigurációs modell létrehoz egy H gráfot úgy, hogy először kiosztja a $v_1, v_2, \dots, v_n \in V(H)$ csúcsokhoz a $2e$ félélet, úgy hogy $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ -re a v_i csúcs d_i félélet kap ($d(v_i) = d_i$). Ekkor a v_i és v_j csúcsokat $d_i d_j$ -féleképpen tudjuk összekötni egy éllel. Ezután a modell egyenlő valószínűséggel kiválaszt egy félélpárt és összeköti őket, és ezt addig ismétli, amíg el nem fogynak a félélek. Annak a valószínűsége, hogy a modell összeköt egy konkrét félélpárt, megegyezik $\frac{1}{2e-1}$ -vel, hiszen egy kitüntetett félélet $2e - 1$ másik félélhez kapcsolhatjuk, mindegyikhez ugyanolyan valószínűséggel. Legyen az $X(k, l)$ valószínűségi változó annak az eseménynek az indikátora, hogy az v_i^k és v_j^l félélek között van él ($k \in \{1, 2, \dots, d_i\} = K$, és $l \in \{1, 2, \dots, d_j\} = L$).

$$X(k, l) = \begin{cases} 1 & (v_i^k, v_j^l) \in E(G) \\ 0 & (v_i^k, v_j^l) \notin E(G) \end{cases}$$

Az előzőek alapján tudjuk, hogy

$$\mathbb{E}(X(k, l)) = \mathbb{P}[(v_i^k, v_j^l) \in E(H)] = \frac{1}{2e-1}. \quad (10)$$

Tehát (10) és a várható érték linearitása miatt a keresett valószínűség a következő:

$$\mathbb{P}[(v_i, v_j) \in E(H)] = \mathbb{E} \left(\sum_{\substack{k \in K \\ l \in L}} X(k, l) \right) = \sum_{\substack{k \in K \\ l \in L}} \mathbb{E}(X(k, l)) = d_i d_j \frac{1}{2e-1} \quad (11) \quad \square$$

3. Tétel. Legyen $(d_i)_{i=1}^n$ fokszámsorozat, valamint legyen K a konfigurációs modellel a $(d_i)_{i=1}^n$ fokszámsorozathoz rendelt véletlen gráf. Ekkor q_k azt a valószínűséget jelöli, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott él egyik végpontján k fokú csúcs van, továbbá $q_k = \frac{(k+1)p_{k+1}}{\sum_j jp_j}$. [44]

Bizonyítás. Legyen G gráf és $D : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ valószínűségi változó, ami k értéket vesz fel, ha egy véletlen szerűen kiválasztott csúcs k fokszámmal rendelkezik. Ekkor természetesen $\mathbb{P}(D = k) = p_k$. Továbbá tegyük fel, hogy $\mathbb{E}(D)$ és $\mathbb{E}(D^2)$ léteznek és végesek vagyis, hogy G nem üres gráf, mivel:

$$2e = \sum_i d_i = \sum_k kn_k = n \sum_k kp_k = n\mathbb{E}(D). \quad (12)$$

A q_k meghatározásához a kérdés tehát az, hogy egy tetszőleges nem izolált csúcs szomszédai közül kiválasztva egy v csúcsot, mi annak a valószínűsége, hogy v -nek k fokszáma van. Könnyű látni, hogy q_k különbözik p_k -tól, hiszen v -t egy él mentén értük el, eleve $d(v) \geq 1$, amit a p_k esetén nem tettünk fel. A G gráfban összesen $2e$ ($|V(G)| = n$ és $|E(G)| = e$) félél van. Egy k fokú csúcsához tehát k félélen keresztül juthatunk el közvetlenül egy másik csúcsból. Legyen n_k a k fokú csúcsok száma G -ben. Ekkor egy tetszőleges nem izolált

u csúcs egyik féléléből kiindulva $2e - 1$ másik félélhez csatlakozhatunk, és az n_k darab k -fokú csúcshoz pedig kn_k féleképpen köthetjük u egyik félélét. Így felhasználva (12)-t a keresett valószínűség:

$$\frac{kn_k}{2e - 1} \approx \frac{kn_k}{2e} = \frac{kp_k}{\frac{2e}{n}} = \frac{kp_k}{\frac{1}{n} \sum_j d_j} = \frac{kp_k}{\frac{1}{n} \sum_j jn_j} = \frac{kp_k}{\sum_j jp_j} = \frac{kp_k}{\mathbb{E}(D)}, \quad (13)$$

ahol $n_j = \#\{v \in V(G) : d(v) = j\}$.

Mivel nem a foks számokat figyeljük, hanem a megmaradó foks számokat ezért, (13) miatt:

$$q_k = \frac{(k+1)p_{k+1}}{\sum_j jp_j} \quad (14) \quad \square$$

3.1.1.1 R korrelációs együttható

A [45] cikk alapján bemutatunk egy ehhez hasonló, de lényegesen egyszerűbb $R(k_i, k_j)$ korrelációs együtthatót.

$$R(k_i, k_j) = \frac{P(k_i, k_j)}{P_r(k_i, k_j)}, \quad (15)$$

A (15) egyenletben szereplő a számláló is és a nevező is annak a valószínűségét jelöli, hogy egy tetszőleges él két végpontján k_i és k_j fokú csúcsok vannak, csak a számlálóban lévő $P(k_i, k_j)$ a G gráf éleire, a nevezőben lévő valószínűség pedig a $d(G)$ alapján készített K konfigurációs modell éleire vonatkozik (lásd: 2. tétel). $R(k_i, k_j)$ tehát megmutatja, hogy a G gráf mennyire korrelált a korrelálatlan K -val szemben. Például ha egy adott G gráf esetén az $R(k_i, k_j)$ hányados nagyobb mint egy, akkor a G hálózatban nagyobb valószínűséggel találunk éleket a k_i és k_j foks számú csúcsok között.

3.1.2. Szomszédok átlagos fokszáma (*Neighborhood connectivity*)

Az asszortativitási együtttható mellett, egy másik gyakran használt eszköz az asszortativitás kimutatására a k fokú csúcsok és szomszédai átlagos fokszáma korrelációjának vizsgálata. A továbbiakban jelölje $v_i \sim v_j$ azt, hogy $(v_i, v_j) \in E(G)$ vagyis, hogy a v_i és v_j csúcsok között fut él. Tehát a G gráf v_i csúcsának a szomszédai vett fokszáma szerinti korrelációja a következőképpen van definiálva [46]:

$$k_{nn}(v_i) = \frac{\sum_{v_j | v_i \sim v_j} d_j}{k_i} \quad (16)$$

Egy G gráfban a k fokú csúcsok szomszédainak átlagos fokszáma a következőképpen számolható:

$$k_{nn}(k) = \sum_{k'} k' \mathbb{P}(k'|k) = \frac{\sum_{v_i | d(v_i)=k} k_{nn}(v_i)}{n_k} = \frac{1}{kn_k} \sum_{\substack{d_j | \exists v_i: \\ d_i=k \\ v_i \sim v_j}} d_j \quad (17)$$

Ahol $\mathbb{P}(k'|k)$ annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott él két végpontján egy k és egy k' foksámú csúcs található. Továbbá, a korábbi jelöléseknek megfelelően, n_k a k fokú csúcsok száma.

3. Megjegyzés. A $k_{nn}(v_i)$ jelölésben az nn alsó index a vizsgált v_i csúcs (legközelebbi) szomszédaira utal (*nearest neighbours*). Kiterjeszthetjük a megfigyelést, a szomszédokon kívül az v_i -től legfeljebb l távolságra lévő csúcsok fokszámaira is ($k_{l_{nn}}(k_i)$), például $l = 2$ paraméter választása esetén a szomszédok szomszédainak foksámát is figyelembe vesszük.

3.1.2.1 A szomszédok átlagos tulajdonsága

Ebben az alfejezetben bemutatom, hogy a saját elgondolásaim alapján, hogyan lehetne kiterjeszteni az előző alfejezetben definiált asszortativitási mérőszámot más, csúcsokhoz rendelt tulajdonságokra.

Legyen $G(V, E)$ gráf és egy $t : V(G) \rightarrow \mathbb{R}$ tulajdonságfüggvény. Ekkor a szomszédok átlagos fokszámát a következőképp tudjuk általánosítani:

Legyen $t_{nn}(t_i)$ a $v_i \in V(G)$ csúcs szomszédainak tulajdonságainak átlaga, azaz

$$t_{nn}(v_i) = \frac{\sum_{v_j | v_i \sim v_j} t(v_j)}{d(v_i)} \quad (18)$$

Továbbá a T tulajdonságú csúcsok korrelációja a következő:

$$t_{nn}(T) = \frac{\sum_{v_i | t(v_i)=T} t_{nn}(v_i)}{|V_T|} \quad (19)$$

Ahol, $V_T = \{v \in V(G) : t(v) = T\}$ azaz a T tulajdonságú csúcsok halmaza.

4. Megjegyzés. A 3.1.1.1 részben bemutatott R korrelációs együtthatót is lehet általánosítani olyan t' tulajdonságfüggvényre, ahol t' függ a hálózat topológiájától (például csúcsközöttiség, központiség). Legyen $G(V, E)$ gráf, p_k fokszámeloszlással, valamint K a p_k fokszámeloszlású konfigurációs modell.

$$R_{\mathbb{D}^2} = \frac{\sum_i \mathbb{D}^2(t'(v_i))p_i}{\sum_i \mathbb{D}^2(t'_r(v_i))p_i}, \quad (20)$$

Ahol $t'_r(v_i)$ tulajdonságfüggvény a K gráf csúcsain van értelmezve, azaz $t'_r : V(K) \rightarrow \mathbb{R}$.

Természetesen szórásnégyzet helyett számolhatunk a t' tulajdonságfüggvény várhatóértékével is, de bizonyos esetekben az $R_{\mathbb{D}^2}$ együtthatóval szemben $R_{\mathbb{E}}$ nem tudja megkülönböztetni a különböző topológiájú hálózatokat [47] (lásd: 4.2 alfejezet).

$$R_{\mathbb{E}} = \frac{\sum_i \mathbb{E}(t'(v_i))p_i}{\sum_i \mathbb{E}(t'_r(v_i))p_i}, \quad (21)$$

Csúcsközöttiség (*Betweenness centrality*) A csúcsokon értelmezett t tulajdonságfüggvénynek vehetjük például a csúcsközöttiséget, és többek között ez alapján is megvizsgálhatjuk a csúcsok (C_{nn}) korrelációját. Mindemellett csúcsok fokszámának és csúcsközöttiségének kapcsolata önmagában is adhat némi információt a hálózat struktúrájáról [47]. A 4.2. alfejezetben részletesebben megvizsgáljuk, hogy van-e összefüggés a fraktalitás és csúcsközöttiség között, továbbá a 4.2 részben szimulációkat is végzünk majd ezzel kapcsolatban.

10. Definíció. Legyen $G(V, E)$ gráf. Egy $v \in V(G)$ csúcs C csúcsközöttisége:

$$C(v_i) = \sum_{v_j, v_k \in V(G)} \frac{\sigma_{j,k}(v_i)}{\sigma_{j,k}} \quad (22)$$

Ahol $\sigma_{j,k}(v_i)$ a legrövidebb v_i -n keresztül haladó v_j és v_k közötti (G -beli) utak számát jelöli, $\sigma_{j,k}$ pedig az összes v_j és v_k közötti legrövidebb út száma.

Tehát $v \in V(G)$ csúcsközöttisége azzal arányos, ahány legrövidebb út halad a v csúcson keresztül a G gráfban.

11. Definíció. Legyen $G(V, E)$ gráf, p_i fokszámeloszlással. A (20) alapján a csúcsközöttiség R_C korrelációja G -ben a következő [47]:

$$R_C = \frac{\sum_i \mathbb{D}^2(C(v_i)) p_i}{\sum_i \mathbb{D}^2(C_r(v_i)) p_i} \quad (23)$$

4. Fraktálos hálózatok eredete

Az 1. fejezetben bemutatott skálafüggetlen hálózatmodellek (például Barabási–Albert-modell) nem bizonyultak önhasznó vagy fraktálos hálózatoknak, annak ellenére, hogy a fokszámeloszlásuk lecsengése megegyező lehet fraktálos hálózatok fokszámeloszlásával. Emiatt egy hálózat fokszámeloszlásából nem

tudjuk megmondani, hogy az fraktálos vagy sem. Ebben a fejezetben azt fogjuk megvizsgálni, hogy milyen jellemzői lehetnek a fraktálos hálózatoknak, és megvizsgáljuk, hogy erre megfelelő mérőszám lehet-e a csúcsok közötti asszortativitás, vagy a csúcsok fokszáma és csúcsközöttisége közötti korreláció mértéke.

4.1. Asszortativitás mint fraktalitás okozója

Természetesen merült fel a kérdés, hogy mi okozhatja egy hálózat fraktálos topológiáját. Ahhoz, hogy ezt meg tudjuk válaszolni, azt kell megfigyelni, hogy milyen törvényszerűségek uralkodnak a hálózat fejlődése közben, nevezetesen, hogy a hálózathoz újonnan érkező csúcsok hogyan csatlakoznak a már meglévő csúcsokhoz [45]. Például láttuk az 1. részben, hogy a Barabási–Albert-modell bevezetését az az elv motiválta, hogy „aki gazdag, az még gazdagabbá válik”. C. Song, S. Havlin és H. Makse a [45] cikkükben úgy sejtik, hogy a fraktálos hálózatok fejlődésére vonatkozóan a kérdéses szabályra a választ a csúcsok és a dobozok közötti korreláció adja.

A korreláció meghatározására az első kísérletük az volt, hogy megvizsgálták különböző hálózatokra vonatkozóan az 3.1.1.1. alfejezetben definiált $R(k_1, k_2) = \frac{P(k_1, k_2)}{P_r(k_1, k_2)}$ korrelációs együtthatót, ami megmutatja, hogy a fraktálos hálózatok szerkezete mennyire különbözik a véletlen, korrelálatlan hálózatstruktúrától [45].

Az egyik lehetséges módszert arra, hogy a különböző hálózatokat osztályokba soroljuk a korreláltságuk alapján, úgy kaphatjuk, ha kiszámoljuk az $R(k_1, k_2)$ hányadosokat és lenormáljuk az adott hálózat méretével. Azonban az R arányszámot vizsgálva, a ρ_D korrelációs együtthatóhoz hasonlóan (lásd: 5. megjegyzés) kiderült, hogy a legtöbb valós hálózat antikorreáltnak bizonyult a konfigurációs modellel kapott korrelálatlan hasonmásukkal szemben [45]. Ez azért van, mert annak ellenére, hogy a konfigurációs modell korrelálatlan, a (9) egyenletből látszik, hogy a csomópontok (relatív nagy fokszámú csúcsok) jóval nagyobb valószínűséggel lesznek szomszédai egymásnak, mint a kis fokszámú csúcsok. Következésképpen ezzel a módszerrel, az R viszony-

számmal nem lehet megkülönböztetni a fraktálos és nem fraktálos hálózatokat egymástól. Ebből kifolyólag a [45] cikkben azt vizsgálták meg, hogy a hálózatok egymáshoz képest mennyire korreláltak, tehát a kapott különböző R arányokat hasonlították össze egymással, és azt az eredményt kapták, hogy a csomópontok közötti taszítás nagysága a különböző valós hálózatokban a következő: Konfigurációs-modell < Internet < WWW < Fehérjehálózat < Anyagcsere hálózatok. Ebből a megfigyelésből adódóan a fraktálos hálózatok esetében tipikusabb, hogy a nagy fokszerű csúcsok taszítják egymást (diszasszortatívák) [40]. Más szavakkal, a csomópontok között nem jellemző a közvetlen él, szomszédaikat főleg relatíve kis fokszerű csúcsok alkotják. Továbbá a nem fraktálos hálózatok kompaktabb hálózatok és gyakran futnak élek a csomópontok között, mint például a már említett Internet hálójában, ami jóval kisebb mértékű antikorreáltságot mutat a fraktálos WWW-val szemben [45].

Természetesen ahhoz, hogy meg tudjuk mondani, hogy egy hálózat fejlődése közben állandó-e a csomópontok közötti taszítás, és hogy pontosan meg tudjuk vizsgálni a fraktálosság és a diszasszortativitás kapcsolatát, nem elég azt megfigyelni, hogy egy adott fraktálos hálózat mennyire diszasszortatív, hanem az eredeti hálózaton kívül, a hálózaton végrehajtott renormálási folyamat alatt kapott renormált hálózatokat is elemeznünk kell a korreáltság szempontjából. Ha az így kapott eredmények közel azonosak, illetve ugyanazt az eljárást nem fraktálos hálózatokon alkalmazva más eredményeket kapunk, akkor a 2.2. részben leírtak alapján következtethetünk arra, hogy ez a tulajdonság, azaz a csomópontok közötti taszítás jelensége végigkíséri a fraktálos hálózatokat a fejlődésük során. A 4.4. alfejezetben bemutatunk egy hálózatmodellt, aminek bevezetését az előbbi tulajdonságok motiválták, és ennek segítségével demonstráljuk majd a fraktálos hálózatok fejlődésének folyamatát is, valamint ezen a modellen számítógépes szimulációk segítségével megvizsgáljuk az asszortativitás és fraktalitás kapcsolatát.

5. Megjegyzés. *A fokszerűsokra alkalmazott Pearson-féle r korreálációs együttható, vagyis az (8) egyenletben definiált ρ_D nem alkalmas a fraktálos és nem*

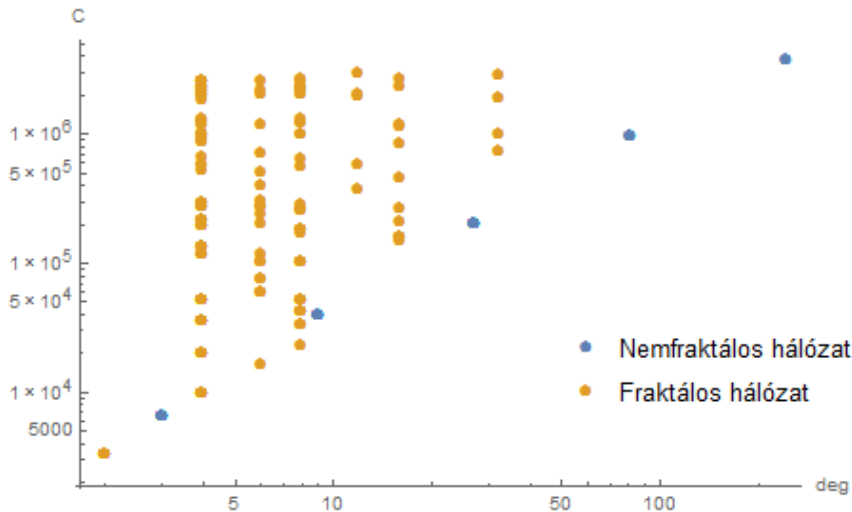
fraktálos hálózatok megkülönböztetésére, mert vizsgálatok alapján bebizonyosodott [48], hogy a legtöbb valós hálózat ρ_D korrelációs együtthatója negatív, kivéve a szociális hálózatokét [40, 44], valamint a vizsgálatokból arra következtettek, hogy ρ_D nem invariáns a renormálási folyamatra [45]. Továbbá a [49] cikkben megmutatták, hogy számos diszasszortatív skálafüggetlen gráfban, a csúcsok számával a végtelenhez tartva (gráflimesz, lásd: [50]) a ρ_D korrelációs együttható nem lehet negatív. Így a korreláció vizsgálatára a szomszédos csúcsok fokszámaának nagyság szerinti sorrendjéből számolható mennyiséget javasolnak.

4.2. Csúcsközöttiség és fraktalitás kapcsolata

A fraktálos és nemfraktálos hálózatok különbségeinek feltérképezésére egy másik lehetséges út, a csúcsok csúcsközöttiségeinek vizsgálata. A 3.1.2.1 alfejezetben definiáltuk a csúcsközöttiség fogalmát (10. definíció), és ismertettük, hogy egy csúcs csúcsközöttisége azzal arányos, ahány legrövidebb út halad keresztül rajta. A csúcsközöttiség fontos jellemzője a valós hálózatok csúcsainak, például a közlekedési hálózatot tekintve a szállítás, közlekedés hatékonyabb, ha az a legrövidebb utakon keresztül történik, továbbá kulcsfontosságúak azok a csúcsok, amiknek magas a csúcsközöttisége. Másrészt, ha növeljük a magas csúcsközöttiségű csúcsok kapacitását, akkor a szállítás még hatékonyabbá válik [51].

Ebben az alfejezetben a [47] munkát követve megmutatjuk, hogy a fraktálos hálózatokban általában kisebb korreláció van a csúcsok fokszáma és a csúcsközöttisége között, mint a nemfraktálos hálózatokban. A [47] cikkben négy valós hálózaton végeztek kísérleteket, többek között a WWW és az Internet hálóján is, és arra következtettek, hogy amíg a nemfraktálos hálózatokban egy csúcs csúcsközöttisége arányosan növekszik a fokszámaival, addig egy fraktálos hálózatban a relatíve kis fokszámú csúcsoknak is lehet magas csúcsközöttisége. Továbbá megmutatták, hogy néhány véletlen élet hozzáadva egy fraktálos hálózathoz jelentősen lecsökken a kis fokszámú csúcsok

csúcsközöttisége, ezzel szemben ugyanez az eljárás egy nem fraktális hálózaton, lényegesen kisebb hatással van a csúcsközöttiségekre.

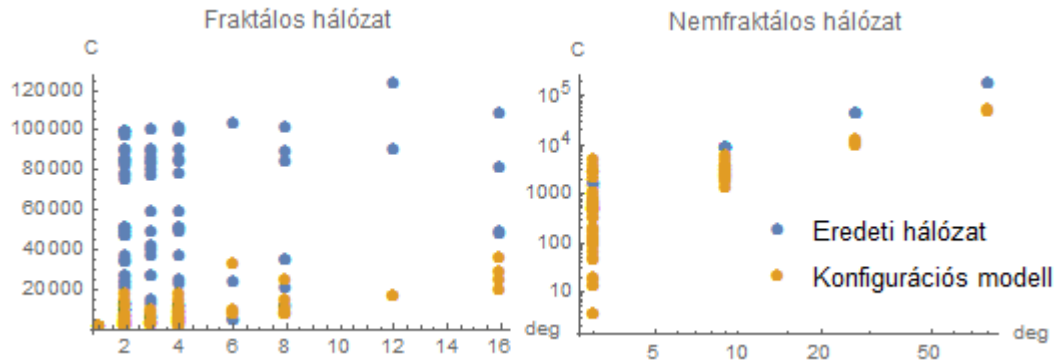


8. ábra. A Song–Havlin–Makse-modell (4.4. alfejezet) által generált ugyanakkora méretű fraktális és nem fraktális hálózatok csúcsainak fokszámainak és csúcsközöttiségeinek korrelációjának vizsgálata. A képet a Wolfram *Mathematica* program segítségével készítettem.

Általánosan elfogadott tény [52], hogy számos hálózatban, ha egy csúcs magas fokszámmal rendelkezik, akkor magasabb csúcsközöttiséggel is, hiszen minél több szomszédja van egy csúcsnak, annál nagyobb az esélye, hogy jó néhány legrövidebb út halad keresztül rajta, másrésztől annak az esélye, hogy egy kis fokszámú csúcson halad át nagy mennyiségű legrövidebb út meglehetősen kicsi szokott lenni, kivéve a fraktális hálózatok esetében. A 8. ábrán jól látszik, hogy a fraktális hálózat esetében a kis fokú csúcsok csúcsközöttiségeinek értéke relatíve nagy skálán mozognak, továbbá ezeknek a csúcsoknak számottevő része megközelítőleg akkora csúcsközöttiséggel rendelkezik, mint a legnagyobb csomópontok. Másfelől a nemfraktális hálózatban erős korreláció áll fenn a csúcsok fokszáma és csúcsközöttisége között.

A különböző hálózatokban és hálózatmodellekben a csúcsok fokszáma és csúcsközöttisége közötti korrelációt a 11. definícióban bevezetett R_C együttműködéssel vizsgálták meg. Emlékeztetőül, az $R_C(k)$ együttműködés, hasonlóan az

$R(k_1, k_2)$ együtthatóhoz, összehasonlítja az eredeti hálózatot, a hálózat fokszámsorozatával készített konfigurációs modellel, a k -fokú csúcsok csúcsközöttiségeinek $\sigma_C(k)$ szórása alapján. Ha egy adott k értékre, a $\sigma_C(k)$ nagy értéket vesz fel, akkor gyengébb korreláció van a k fokszám és a k fokszámú csúcsok csúcsközöttisége között, hiszen ez azt jelenti, hogy a k fokú csúcsok csúcsközöttiségeinek értéke nagy mértékben szóródik a várható értéktől. A 8. ábra jól szemlélteti, hogy a fraktális hálózat esetében kis fokú csúcsokhoz nagy $\sigma_C(k)$ érték tartozik.



9. ábra. Fraktális és nemfraktális hálózatok és a fokszámsorozatukhoz rendelt konfigurációs modell által létrehozott gráfok csúcsainak fokszámainak és csúcsközöttiségeinek korrelációjának vizsgálata. A fraktális hálózat esetében lineáris ábrázolást alkalmaztam, mert logaritmikus ábrázolás ebben az esetben megtévesztő lenne. A hálózatok generálásához s Song–Havlin–Makse-modellt használtam. A képet a Wolfram *Mathematica* program segítségével készítettem.

Továbbá a fraktális hálózatokat tekintve, a kisebb fokszámú csúcsok körében a $\sigma_C(k)$ értéke jelentősen nagyobb, mint a hálózatok fokszámsorozatához rendelt konfigurációs modell esetében, míg a nemfraktális hálózatokat és a hozzájuk tartozó konfigurációs modelleket összevetve a k fokú csúcsaik $\sigma_C(k)$ tulajdonságuk alapján azt kapjuk, hogy megközelítőleg azonos értékeket vesznek fel, sőt bizonyos nemfraktális hálózatokban a $C(k)$ szórása még kisebb is lehet, mint a konfigurációs modellben [47]. A 9. ábrán látható erre egy demonstráció, ami az előző megfigyelést igazolja. Tehát a fraktális hálózatokban a csúcsok csúcsközöttisége és fokszáma között gyengébb korreláció

van, mint a nemfraktális hálózatokban. Könnyű meggondolni, hogy ez annak következménye, hogy a fraktális hálózatok csomópontjai ritkán találunk éleket, így a legrövidebb utaknak muszáj kisebb fokszámú csúcsokon is keresztül haladniuk.

4.3. Fraktális hálózatok robusztussága

A hálózateméleti robusztusság fogalma megmutatja, hogy mennyire ellenálló egy gráf a támadásokkal szemben. A robusztusság meghatározásához azt figyeljük meg, hogy hogyan változik egy hálózat struktúrája, miközben támadjuk, azaz éleket vagy csúcsokat távolítunk el belőle. A támadások alatt meg lehet vizsgálni például, hogy hogyan változik a gráf átmérője, legalább mennyi csúcsot vagy élet kell törölni, hogy szétesen a gráf, vagy hogy hogyan függ a komponensek száma a törölt csúcsok hányadának függvényében. Számos védekező és támadó stratégia létezik, erről részletesebben a [53] cikkben lehet olvasni.

A támadások lehetnek célzottak vagy véletlenszerűek. Célzott támadás esetében a támadó kiválaszt konkrét csúcsokat vagy éleket valamilyen szempont alapján (például fokszám, csúcsközöttség), aztán kiiktatja őket. Véletlen támadás esetén, a törölni kívánt csúcsokat vagy éleket véletlenszerűen választja ki. A nemfraktális hálózatok, mint például az Internet, különösen érzékenyek a célzott támadásokra [54], hiszen ezekben a hálózatokban, ellentétben a fraktális hálózatokkal [45], a csomópontok között általában fut közvetlen él, sőt sokszor találni egy középponti csomópontot, ami minden csomóponttal kapcsolatban áll, következésképpen ha kitörölünk néhányat a legnagyobb fokszámokkal rendelkező csúcsok közül, akkor a hálózat rengeteg relatíve kis komponensekre fog szétesni, ami az Internet esetében katasztrofális következményekkel járna [55].

A vizsgálatok alapján a fraktális hálózatok robusztusabbnak bizonyultak, a nemfraktális hálózatokkal szemben, ami a csomópontok közötti taszítás jelenségének köszönhető [45]. Ez magyarázatot adhat arra, hogy a biológiai hálózatok, mint például a sejthálózat, miért rendelkeznek erősen fraktá-

los szerkezettel, hiszen ezáltal ellenállóbbak az olyan támadásokkal szemben, mint például a fertőzések vagy mutációk [56].

4.4. Song–Havlin–Makse-modell

A Song–Havlin–Makse-modell bevezetését az motiválta, hogy demonstrálni tudják a fraktális hálózatok növekedését valamint, hogy vizsgálják a fraktalitás és az asszortativitás kapcsolatát úgy, hogy egy paraméterrel állítani tudják a csomópontok közötti taszítás mértékét. A cél az volt, hogy egy olyan fejlődő hálózatmodellt hozzanak létre, ami skálafüggetlen, kis-világ topológiájú és fraktális. Ahhoz, hogy teljesüljenek vagy részben teljesüljenek ezek a tulajdonságok, a következő feltételekre volt szükség.

Legyen a modell által generált gráf a $t \in \mathbb{N}$ időpontban G_t , továbbá legyen $N(t) = |V(G_t)|$, $L(t) = \text{Diam}(G_t)$ és $k_i(t) = d(v_i)$, ahol $v_i \in V(G_t)$. Ekkor $\forall t \geq 1$ -re,

$$N(t) = nN(t-1), \quad (24)$$

$$k_i(t) = sk_i(t-1), \quad \forall v_i \in G_{t-1}, \quad (25)$$

$$L(t) + L_0 = a(L(t-1) + L_0), \quad (26)$$

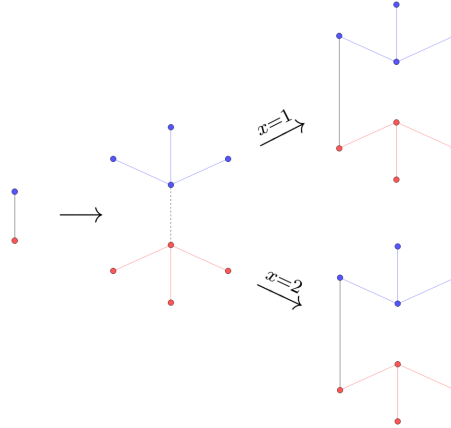
Ahol $n > 1$, $s > 1$ és $a > 1$ időben állandó konstansok [45]. A (24) egyenlet biztosítja, hogy fejlődés közben a hálózat mérete hatványredben növekedjen, ugyanis kiderült számos valós hálózatról, hogy a méretük ilyen ütemben gyarapodik [57]. A (25) egyenletet a Barabási-Albert féle preferenciális kapcsolódás elve [13] motiválta. Ezáltal lesz a modell foksám eloszlása skálafüggetlen, azaz $P(k) \sim k^{-\gamma}$. Végül a (26) egyenlet a modell átmérőjének időbeli növekedését írja le, ahol a meghatározza, hogy a modell kis-világ topológiájú legyen-e, illetve befolyásolja a hálózat fraktalitását is [14]. Könnyű meggondolni, hogy az átmérő növelésével növekszik a dobozfedéshez szükséges dobozok minimális száma, valamint az 5. fejezetben ezt demonstrálni is fogjuk ezen a modellen.

Korábban említettem, hogy az asszortativitás vizsgálatának érdekében állíthatóvá tették egy p paraméter által a csomópontok közötti taszítás mértékét. Megmutatjuk, hogy ezáltal két különböző hálózattípust, illetve ezek keverékét tudjuk majd létrehozni. Mindkét főtípus skálafüggetlen, de az egyik nemfraktálos kis-világ, míg a másik fraktálos struktúrával rendelkezik. A p paraméter alkalmas megválasztásával a modell egyszerre lehet fraktálos és kis-világ topológiájú.

4.4.1. A modell konstrukciója

A modell egy irányítatlan hálózatot hoz létre.

Kezdetben van egy kis gráf, általában két csúcs, amik össze vannak kötve egy éllel. Majd minden egyes lépésnél, minden egyes él mindkét végpontja m - m darab utódcsúcsot hoz létre, azaz minden v csúcsnak $m \cdot \deg(v)$ utódja keletkezik. Ezt követően minden egyes (u, v) élet egymástól függetlenül p valószínűséggel törölünk, és ha ezáltal egy (w, y) él törlésre került, akkor a w és y utódai között kiválasztunk x darab (w', y') csúcspárt olyan módon, hogy w' a w , y' az y csúcs valamelyik utódja, majd összekötjük őket egy-egy éllel. Így ebből látszik, hogy a p paraméter értékétől függ a csomópontok közötti taszítás nagysága. Ha az x tényező értékét például egynek választjuk, akkor az eredeti (u, v) élet lényegében áthelyezzük az u és v valamelyik utódpárja közé. Természetesen adódik, hogy $x = 1$ paraméter választása esetén a modell egy fa , $x > 1$ esetén értelemszerűen nem teljesül a körmentesség. A 10. ábra a modell fejlődését mutatja be, $p = 1$ és $m = 3$ paraméterek választása esetén.

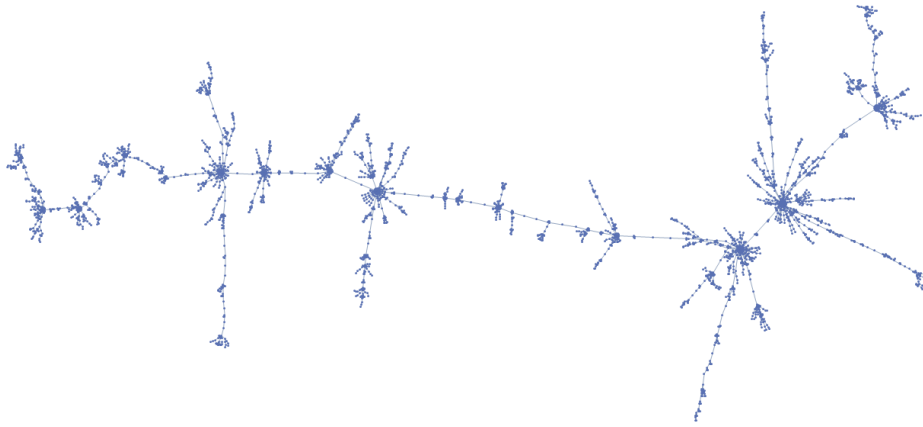


10. ábra. A Song–Havlin–Makse-modell fejlődése. Az ábrához a gráfokat a Wolfram *Mathematica* programmal készítettem.

Összefoglalva, a modell fejlődése közben az t . iterációról a következőképpen adódik az $(t + 1)$.:

1. $\forall (u, v) \in E(G_t)$ élre, u és v generál m - m darab utódot.
 $(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_m)$
2. $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ -re $(u, u_i) \in E(G_{t+1})$, és $(v, v_i) \in E(G_{t+1})$
3. Majd p valószínűséggel, egymástól függetlenül törölünk $\forall (u, v) \in E(G_t)$ élet és, ha ezáltal egy (w, y) élet kitöröltünk, akkor
 $(w_{i_1}, y_{j_1}), (w_{i_2}, y_{j_2}), \dots, (w_{i_x}, y_{j_x}) \in E(G_{t+1})$, ahol $(i_1, i_2, \dots, i_x)$ és $(j_1, j_2, \dots, j_x)$ az $(1, 2, \dots, x)$ egy-egy véletlen egymástól független permutációja és $x \leq m$

A modell generáló kódját *Mathematica*-ban írtam meg és a 11. ábrán egy a kód által generált véletlen gráf látható.



11. ábra

4.4.2. HADG-modell

A [58] cikkben az eredeti Song–Havlin–Makse-modellt DGM-nek (Dynamical Growth Model), azaz dinamikusan fejlődő modellnek nevezik. A cikk szerzői, az általuk módosított DG-modellt HADG modellnek nevezik (Hub Attraction Dynamical Growth Model), azaz magyarul olyan dinamikusan fejlődő modell, amiben a csomópontok között vonzódás áll fenn.

A 4.1 fejezetben megemlítettük, hogy a [45] cikkben megfigyelték, hogy a p értékének növelésével egyszerre nőtt a modell fraktalitása is, így arra a következtetésre jutottak, hogy az asszortativitás, pontosabban a csomópontok közötti taszítás okozza egy hálózat fraktális szerkezetét. Ezenkívül más hasonló kutatások is azt állítják, hogy a fraktális, skálamentes hálózatok disszasszortatívák [59], ezzel szemben egy másik cikkben [58] arra az eredményre jutottak, hogy a fraktális hálózatokban is lehetnek élek a csomópontok között, továbbá ezt demonstrálják is egy olyan hálózatmodellen, ami az előző alfejezetben (4.4) bemutatott Song–Havlin–Makse-modell egy módosítása. Ebben az alfejezetben a módosított modell konstrukcióját fogjuk bemutatni, valamint az 5. fejezetben részletesen megvizsgáljuk a két hálózatmodell fraktalitását, asszortativitását, valamint ezen két tulajdonság korrelációját is. A módosított Song–Havlin–Makse-modell abban különbözik az előbbitől, hogy a p paraméter nem előre megadott konstans, hanem dinamikusan változik,

attól függően, hogy egy él két végpontján mekkora fokszerű csúcsok találhatóak, ezért a módosított modell esetében erre a paraméterre p_{ij} jelöléssel fogunk hivatkozni. A p_{ij} paraméterrel be tudjuk állítani külön-külön, hogy a modell fejlődése közben, mekkora valószínűséggel legyen él két csomópont, illetve két alacsony fokszerű csúcs között. A [58] cikk állítása szerint, ha a modellt olyan paraméterekkel állítjuk be, hogy a csomópontok között nagy valószínűséggel, viszont a kisebb fokszerű csúcsok között kisebb valószínűséggel fusson él, akkor még mindig egy olyan skálafüggetlen fraktális hálózatot kapunk, amiben a csomópontok között gyakoriak az élek. Továbbá megmutatták, hogy ilyen típusú valós fraktális hálózat a színészek kollaboráció alapú szociális hálózata, amiről már korábban belátták, hogy fraktális [27].

A módosított modell fejlődése az eredeti modelltől csak az élek törlésére vonatkozó valószínűség alakulásában különbözik, ami ahogy már említettem, függ az élek végpontján lévő csúcsok fokszerűségétől. Tehát a modell fejlődése közben t . iterációról a $(t + 1)$ -re a p valószínűség a következő:

$$p_{ij} = \begin{cases} a, & \text{ha } \frac{k_i(t-1) + k_j(t-1)}{2k_{\max}(t-1)} > T, \\ b, & \text{különben,} \end{cases}$$

ahol $k_{\max}(t-1) = \max_{v_i \in V(G_{t-1})} d(v_i)$, továbbá T, a és b , $0 \leq a, b, T \leq 1$ előre adott paraméterek. Összefoglalva, ha egy e él mindkét végpontjának fokszerűsége lenormálva a gráfban található legnagyobb fokszerűséggel még mindig nagyobb mint T , akkor a annak a valószínűsége, hogy az e élet kitöröljük. Ha ez a feltétel nem teljesül, akkor e törlésének valószínűsége b .

4.4.3. Módosított HADG-modell

Ebben az alfejezetben a saját elgondolásaim alapján módosított Song–Havlin–Makse-modellt fogom bemutatni. Tulajdonképpen az előző alfejezetben bemutatott modell konstrukciójának egy továbbgondolása, ami abban különbözik az előző kettő modelltől, hogy nincsen előre adott p valószínűségi para-

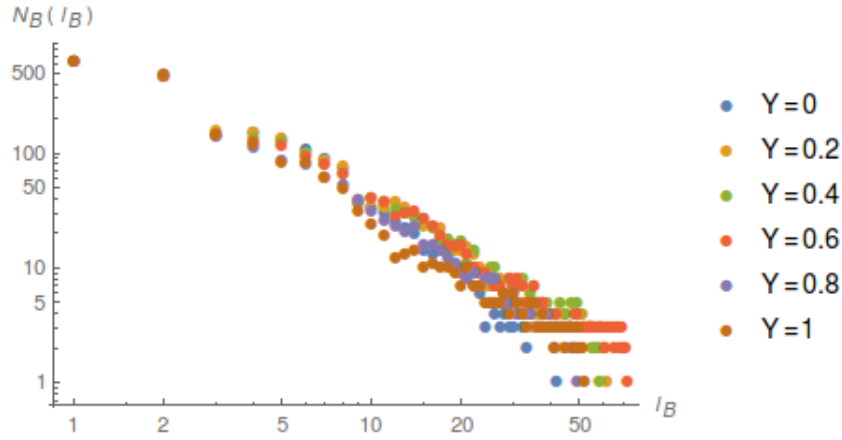
méter, hanem az élek törlésének valószínűsége az élek végpontjainak átlagos fokszámától függ. A továbbiakban erre a mennyiségre élfokszámként fogok hivatkozni.

$$\deg(u, v) = k_{(u,v)} := \frac{1}{2}d(u) + \frac{1}{2}d(v) \quad (27)$$

A modell fejlődése közben a t . iterációról a $(t+1)$ -re az (u, v) él törlésének valószínűsége a következő:

$$p_{(u,v)}^* = 1 - \left| Y - \frac{\frac{1}{2}k_u^{(t-1)} + \frac{1}{2}k_v^{(t-1)}}{k_{max}^{(t-1)}} \right| = 1 - \left| Y - \frac{k_{(u,v)}^{(t-1)}}{k_{max}^{(t-1)}} \right|,$$

ahol $0 \leq Y \leq 1$ előre adott paraméter, valamint $k_{max}^{(t-1)} = \max_{v_i \in V(G_{t-1})} d(v_i)$. Az Y paraméter segítségével beállíthatjuk, hogy mekkora fokszámú élek törlésének valószínűsége legyen a legnagyobb. Például egy él törlésének a valószínűsége $Y = 1$ értékadás esetén egyenesen arányos, $Y = 0$ paraméterválasztással pedig fordítottan arányos, az adott él fokszámával. Azaz $Y = 0$ esetén a kis fokszámú csúcsokat összekötő élek nagyobb valószínűséggel törölődnek, mint a csomópontokat összekötő élek, továbbá $Y = 1$ esetén a csomópontokat összekötő élek sokkal nagyobb valószínűséggel törölődnek, mint a kis fokszámú csúcsokat összekötő élek. A modell különlegességét az adja, hogy $\forall Y \in [0,1]$ -ra a hálózat fraktális struktúrát mutat (lásd 12. ábra). Ebből arra következtethetünk, hogy ha a hálózatokban a csúcsokat a fokszámuk szerint különböző csoportokra osztjuk, akkor a fraktális hálózatokat úgy lehetne jellemezni, hogy egy bizonyos csoportba tartozó csúcsok között erős taszítás áll fenn. Ez a bizonyos csoport lehet a csomópontokból álló csúcsok halmaza, de akár lehet a kis vagy közepes fokszámú csúcsok halmaza is. Tehát az előző alfejezetben bemutatott modell, és az általam módosított modell is cáfolja a [27] valamint [47] cikkekben leírtakat, hiszen a fraktális hálózatokban is lehetnek élek a csomópontok között.



12. ábra. Az általam módosított modell fraktalitásának vizsgálata különböző Y paraméter választásokkal.

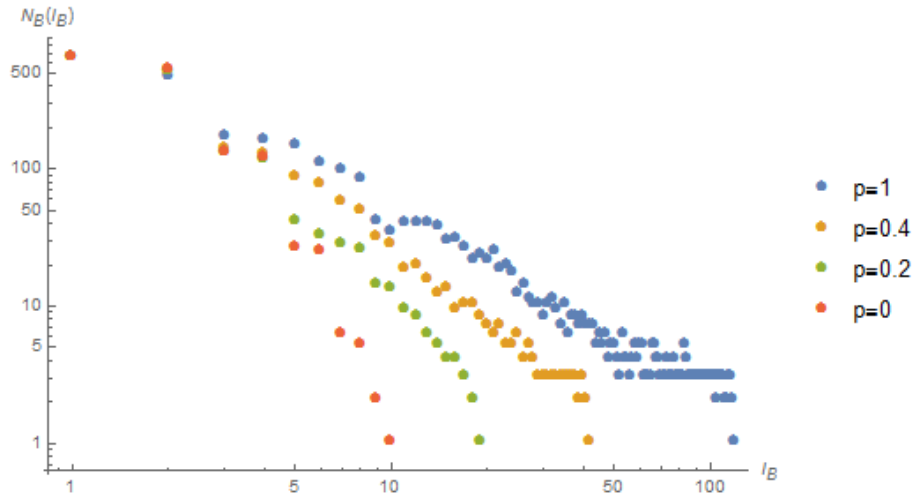
5. Vizsgálatok

Ebben a fejezetben, ahogy a dolgozat korábbi részeiben többször említettem, különböző hálózatelméleti vizsgálatokat fogunk elvégezni az előző fejezetekben leírtakhoz kapcsolódóan. A vizsgálatok főnyomvonalát a fraktalitás és asszortativitás kapcsolatának tanulmányozása adja, amiket a Song–Havlin–Makse-modellen, illetve ennek módosításain fogunk végrehajtani. Az elemzéseket a *Mathematica* programozási nyelv segítségével, a saját kódjaim felhasználásával készítettem el.

5.1. Vizsgálatok a Song–Havlin–Makse-modellen

Elsősorban megmutatjuk, hogy valóban a p paraméter választásán múlik a modell fraktalitása. A 13. ábra jól szemlélteti, hogy p paraméterrel növelésével növekszik a dobozfedéshez szükséges dobozok minimális száma, és fraktális hálózatok esetében, a 2. fejezetben leírt meghatározás szerint (5. egyenlet), logaritmikus ábrázolással $N_B(l_B)$ pontjai egy egyenesre illeszkednek, aminek meredeksége d_B . Továbbá a nemfraktális hálózatokat tekintve, $N_B(l_B)$ nagyságrenddel gyorsabban csökken l_B függvényében, szemben

a fraktálos hálózatokkal. Tehát a $p = 0$ paraméter választás esetén a modell egy nemfraktálos gráfot hoz létre, valamint p fokozatos növelésével egyre fraktálosabb gráfot kapunk.

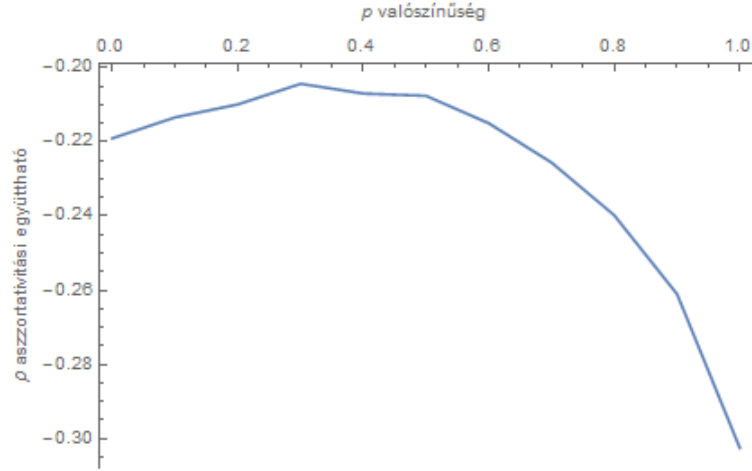


13. ábra. A Song–Havlin–Makse-modell által generált azonos méretű gráfok fraktalitásának vizsgálata, a p paraméter függvényében. A dobozszámlálás elvégzéséhez a 2.1.1. alfejezetben részletezett CBB algoritmus kódját használtam fel.

A 14. ábrán a modell átlagos ρ_D asszortativitását vizsgáltuk p függvényében. A 14. és a 13. ábrákat együttesen figyelve azt tapasztaljuk, hogy p függvényében együttesen változik a modell fraktalitása és az asszortativitása. Ez a megfigyelés alátámasztja a 4.1. alfejezetben leírtakat, ahol a [45] munkát követve ismertettük azt a következtetést, hogy a csomópontok közötti taszítás, azaz a diszasszortativitás a fraktalitás okozója.

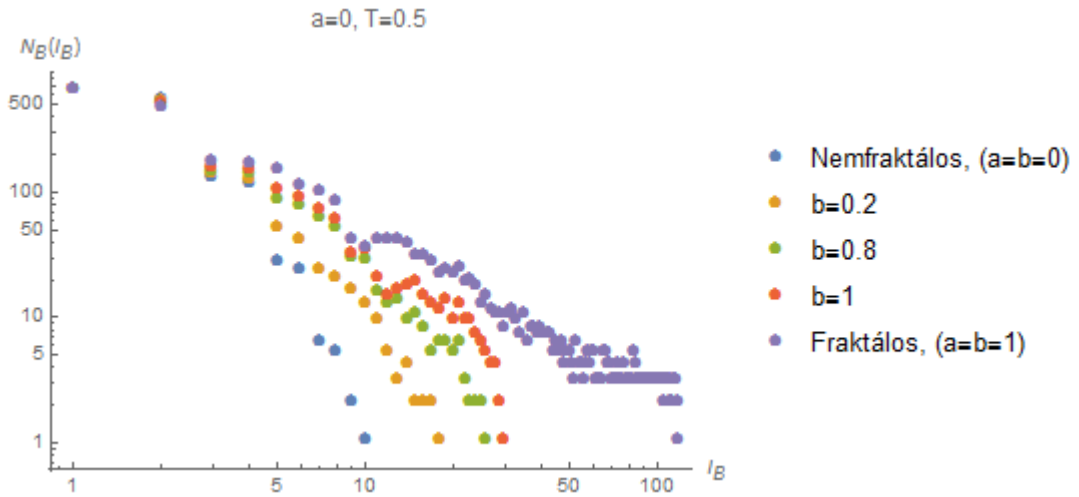
5.2. Vizsgálatok a HADG-modellen

A továbbiakban a módosított Song–Havlin–Makse-modellen, avagy HADG-modellen fogunk vizsgálatokat végezni, elsősorban a 4.4.2. alfejezetben leírtakkal kapcsolatban, pontosabban a [58] cikk elemzéseit fogjuk újraszimulálni, majd a kapott eredményeket tanulmányozzuk, és összevetjük az eredeti



14. ábra. A Song–Havlin–Makse-modell átlagos ρ_D asszortativitása a p paraméter függvényében. A modell fejlődése közben, minden egyes időpontban a $\rho_D(p)$ ilyen görbét vesz fel.

modellen végzett elemzések eredményeivel. A [58] cikk értelmében, a most következő eredményeknek cáfolniuk kell a [27] cikk következtetéseit.

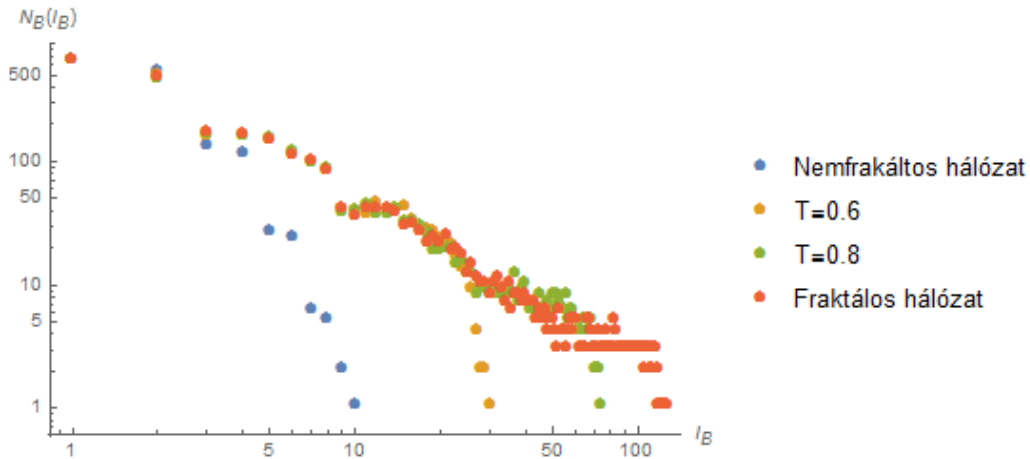


15. ábra. A módosított Song–Havlin–Makse-modell fraktalitásának vizsgálata b függvényében.

A 15. ábrán jól látszik, hogy $a = 0$, $T = 0.5$ fix paraméterek mellett, b függvényében a modell dobozsámlálás függvénye közelíti a fraktálos há-

lázat grafikonját. Szemléletesen, ha a csomópontok között 1 valószínűséggel meghagyjuk az éleket, de a kisebb fokszámú csúcsok között 1 valószínűséggel töröljük az éleket, akkor egy olyan fraktális hálózatot kapunk, amiben a csomópontok között fut él.

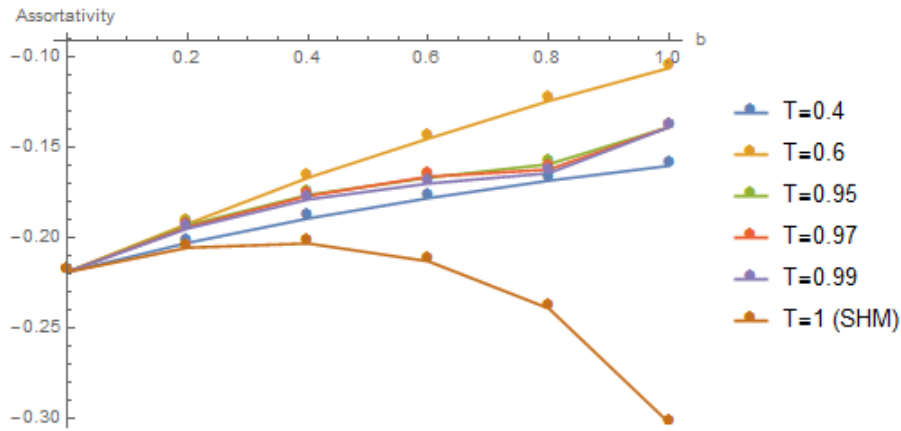
Habár a [58] cikk írói a T paraméter függvényében nem végeztek kísérleteket, a 16. ábra segítségével azt szeretnénk demonstrálni, hogy érdekesebb nagyobb T értéket választani, hiszen szemben a cikk állításával, $T = 0.5$ esetén ránézésre nem tűnik egyértelműen fraktálisnak a modell, továbbá $T = 0.8$ értékadás esetén még mindig egy olyan gráfot kapunk, amiben a csomópontok között fut él, és fraktalitás szempontjából is meggyőzőbb eredményeket kapunk.



16. ábra. A modell fraktalitásának vizsgálata T függvényében, fix $a = 0$, $b = 1$ paraméterek mellett.

A 17. ábrán látszik, hogy mivel a módosított modellben a csomópontok között fut él, így b függvényében átlagosan növekszik az asszortativitása, hiszen minél nagyobb valószínűséggel törölünk éleket a kis fokszámú csúcsok között (és összekötjük az utódaikat), annál gyakoribbak lesznek az élek a kisebb fokú csúcsok között. Továbbá mivel a legnagyobb csomópontok szomszédai egymásnak, mindemellett a kisfokú csúcsok szomszédai között is gyakoribbak a kis fokú csúcsok, így a gráf asszortativitása nyilvánvalóan növekszik.

Összefoglalva, a HADG-modell bizonyos paraméterválasztások esetén olyan fraktális gráfot hoz létre, amiben a csomópontok között fut él, továbbá az asszortativitása nagyobb mint a nemfraktális asszortativitása. Következésképpen teljesen ellentmond a [45] cikk feltevéseinek, miszerint a diszasszortativitás, pontosabban a csomópontok közötti taszítás okozza egy hálózat fraktalitását.

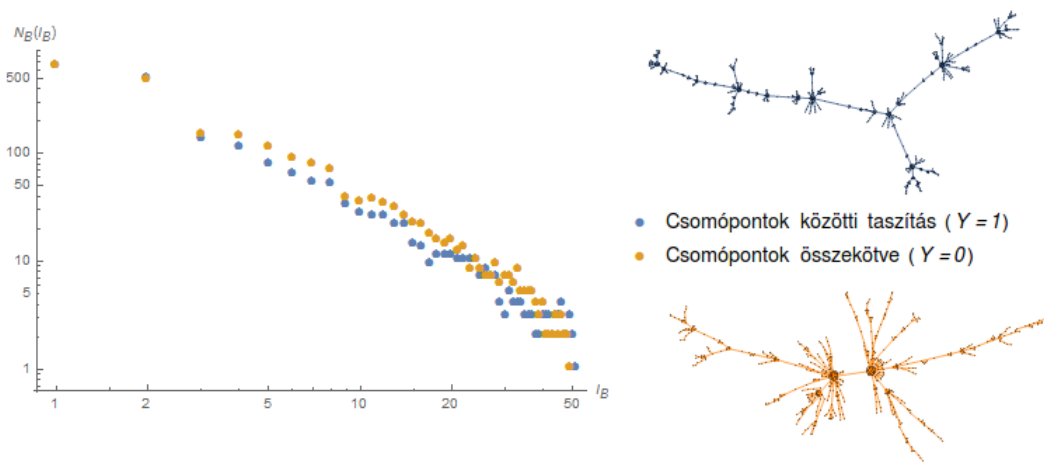


17. ábra. A modell asszortativitásának vizsgálata b függvényében, különböző T értékekre. Jól látszik, hogy az 1-hez közeli T értékek nem közelítik az $T = 1$ paraméter esetén kapott gráf asszortativitását. Könnyű meggondolni, hogy ha a módosított modellen, $T = 1$ értékadás mellett, ugyanazt a gráfot kapjuk, mint az eredeti modellen $p = b$ paraméter esetén, hasonlóan, ha $T = 0$, akkor ezzel ugyanazt kapjuk, mint az eredeti modellen $p = a$ esetén.

5.3. Vizsgálatok a módosított HADG-modellen

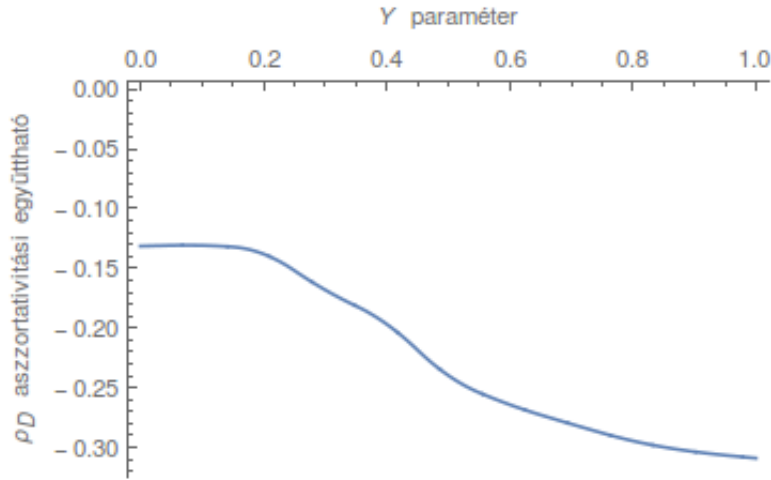
Ebben az alfejezetben a 4.4.3. alfejezetben bemutatott, általam módosított modellen végrehajtott vizsgálatok eredményeit fogjuk ismertetni. Véleményem szerint ez a modell alkalmasabb a [27] cikk eredményeinek cáfolására, mint a HADG-modell, hiszen, ahogy a 18. ábra is szemlélteti, a két látszólag különböző gráfon értelmezett $N_B(l_B)$ függvények ugyanolyan eloszlást követnek. Tehát mindkét gráf fraktális szerkezettel rendelkezik, az is, amiben a csomópontok között fut él, illetve az a gráf is, amiben a csomópontok között taszítás áll fenn. Továbbá a HADG-modellen végzett fraktalitásvizsgá-

lat a 16. grafikonjával összehasonlítva, a saját modellen az $N_B(l_B)$ függvény pontjai, ahogy azt elvárnánk (logaritmikus ábrázolás esetén) megközelítőleg egy egyenesre esnek, míg a HADG-modell esetében egy törött egyenesre. Azaz a saját modell esetében nem létezik egy olyan l^* dobozméret, hogy az $N_B(l_B)$ függvény az l^* ponttól kezdve gyorsabb mértékben tartana a függvény határértékéhez.



18. ábra. A modell által generált két különböző struktúrájú gráf fraktalitásának vizsgálata. Az Y paramétert, a kék színű gráf esetében egynek, a narancssárga gráf esetén nullának választottam, így az előbbi gráfban a csomópontok között taszítás áll fenn, míg az utóbbi gráfban a csomópontok össze vannak kötve.

A 19. ábrán, a modell asszortativitását vizsgáltuk Y függvényében. Azt tapasztaltuk, hogy az Y paraméter értékének növelésével növekedett a modell diszasszortativitása, hasonló okokból, mint a HADG-modell esetében, hiszen $Y = 0$ esetén, a modell konstrukciójából adódóan, egy-egy kis fokszámú csúcs és egy-egy csomópont között nagyobb valószínűséggel találunk éleket, mint $Y = 1$ esetén, amikor a csomópontok között erős taszítás van, valamint gyakoribbak a kis fokszámú csúcsokat és csomópontokat összekötő élek. Így természetesen adódik, hogy Y növelésével növekszik a modell diszasszortativitása.

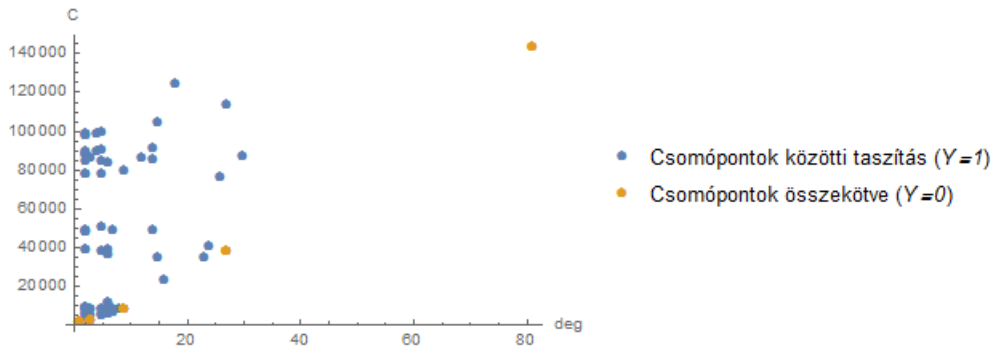


19. ábra. A modell ρ_D asszortativitásának vizsgálata Y függvényében.

A 18. és 19. grafikonokat összevetve kapjuk, hogy míg a modell asszortativitása változott Y függvényében, a fraktalitása állandó maradt, tehát független a fraktalitás az asszortativitástól.

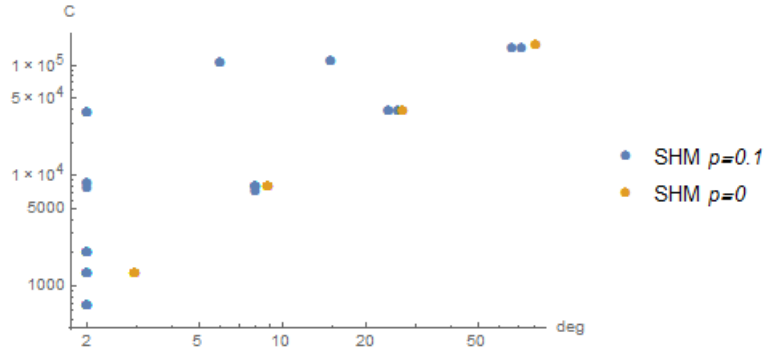
A modell konstrukciójából adódóan, természetesen a [47] cikk, 4.2. alfejezetben leírt eredményeit is cáfolja. A most következő vizsgálatokkal rámutatunk, hogy egy hálózat csúcsainak fokszámainak és csúcsközöttisége közötti korreláció független attól, hogy a hálózat fraktális vagy sem.

A 20. ábrán látható, hogy míg a modell minden $Y \in [0,1]$ paraméter választás



20. ábra. A modell csúcsainak fokszámainak és csúcsközöttiségeinek kapcsolatának vizsgálata.

esetén fraktálos gráfot generál, addig a csúcsok fokszáma és csúcsközöttisége közötti különbség nem független Y értékétől. A 21. ábrával csupán azt szeret-



21. ábra. A Song–Havlin–Makse-modell csúcsainak foksámainak és csúcsközöttiségeinek kapcsolatának vizsgálata. A Song–Havlin–Makse-modell $p = 1$ paraméterválasztással még fraktálos struktúrával rendelkezik.

nénk illusztrálni, hogy már a Song–Havlin–Makse-moddellel is cáfolni lehet azt az állítást hogy a nemfraktálos hálózatokban a csúcsok fokszáma és csúcsközöttisége között erős korreláció áll fenn, hiszen a Song–Havlin–Makse-modell $p = 0$ és $p = 0.1$ paraméterek esetén nemfraktálos gráfokat generálnak, de az utóbbi esetben, már olyan gráfot generál, amiben gyakoriak az olyan kis fokú csúcsok, amiken számos legrövidebb út halad keresztül.

Összefoglalva, a modellen végzett vizsgálatokkal cáfoltuk, helyesebben mondva pontosítottuk a [27] cikk szerzőinek sejtését, hiszen fraktálos hálózatokban is futhatnak élek a csomópontok között. A fraktalitás eléréséhez, ahogy korábban már említettem, elegendő, ha a csúcsok egy bizonyos csoportja lép fel erős taszítás, és ennek a csoportnak nem feltétlenül kell a csomópontoknak lennie. Továbbá cáfoltuk a [47] cikk azon eredményeit, miszerint a fraktálos hálózatokban lényegesen kisebb korreláció áll fenn a csúcsok csúcsközöttisége és fokszáma között, mint a nemfraktálos hálózatokban.

6. Összefoglalás, kitekintés

A dolgozat fő nyomvonalát a fraktalitás és asszortativitás kapcsolatának vizsgálata adja. A [27, 59] cikkek megjelenése óta már-már elfogadott ténynek számít, hogy amíg a nemfraktálos hálózatokban általában futnak élek a csomópontok között, a fraktálos hálózatokban a csomópontok között erős taszítás áll fenn. Azonban az [58, 60] cikkek, továbbá a szakdolgozat végeredménye megcáfolja ezt a sejtést, hiszen az [58] munka alapján, olyan hálózatmodelleket mutattunk be, amik fraktálos struktúrával rendelkeznek, annak ellenére, hogy futnak élek a csomópontjaik között, mindemellett ilyen ilyen típusú valószínű fraktálos hálózat a színészek kollaboráció alapú szociális hálózata is.

A bevezetésben egy általános hálózatelméleti áttekintést adtunk, és definiáltuk a legfontosabb hálózatelméleti fogalmakat, mint például a skálafüggetlenség és a kisvilág-topológia, valamint bemutattuk a leghíresebb hálózatmodelleket. A második fejezetben először ismertettük a geometriai fraktálok, a dobozszámlálás, az önhasonlóság és a renormálás fogalmát, majd megmutattuk, hogyan lehet a fraktalitás és az önhasonlóság fogalmát kiterjeszteni a hálózatokra, a dobozszámlálás és a renormálási folyamat segítségével.

A harmadik fejezetben néhány különböző mérőszámon keresztül ismertettük az asszortativitás fogalmát, majd megmutattuk a saját elképzeléseink alapján, hogy hogyan lehetne általánosítani bármilyen csúcsokhoz rendelt tulajdonságra a csúcsok között mért korrelációt.

Ezt követően a negyedik fejezetben, összekötve a második és harmadik fejezetben leírtakat, részleteztük, hogy milyen jellemzői lehetnek a fraktálos hálózatoknak, ami megkülönbözteti őket a nemfraktálos hálózatoktól. A [27, 47] munkák eredményeit bemutatva elemeztük, hogy erre megfelelő mérőszám lehet-e a csúcsok közötti asszortativitás vagy a csúcsok fokszáma és csúcsközöttsége közötti korreláció mértéke.

A dolgozat ötödik fejezetében vizsgálatokat végeztük három hálózatmodellel. Az első hálózatmodell, a [27] cikk szerzői által konstruált Song–Havlin–Makse-modell, amin keresztül kifejtettük a szerzők sejtését, miszerint a fraktálos hálózatokat a csomópontok közötti taszítás jelensége, azaz a teljes hálózatot tekintve erősebb diszasszortativitás jellemzi. Ezt követően a [58] munka alapján, majd a saját elgondolásaim alapján bemutattuk egy-egy variánsát a Song–Havlin–Makse-modellnek, amikkel az előbbi sejtést cáfoltuk, hiszen ezekkel a modellekkel olyan gráfokat generáltunk, amik fraktálos struktúrával rendelkeztek és emellett a csomópontok között futott él. Továbbá a

saját variánsmodell konstrukciójának köszönhetően rámutattunk arra, hogy az okozhatja egy hálózat fraktalitását, ha a hálózat csúcsait, a fokszámaik alapján különböző csoportokba rendezzük, akkor egy bizonyos ilyen csoport csúcsai között erős taszítás áll fenn.

A dolgozat témáját illetően, még számos nyitott kérdés van ezen a területen, például milyen további mérőszámokkal lehetne megkülönböztetni a fraktálos és nemfraktálos hálózatokat egymástól. Az 5. fejezetben bemutatott vizsgálatokon kívül, más szempontok alapján is végezhetnénk elemzéseket, például megfigyelhetnénk, hogy véletlen élek hozzáadásával, hogyan változik egy hálózat fraktalitása, asszortativitása, vagy a csúcsok fokszámainak és csúcsközöttiségének korrelációja. Továbbá, vehetnénk vizsgálatok alapjául más, esetleg determinisztikusan fejlődő, fraktálos hálózatmodelleket.

Véleményem szerint a hálózatelmélet kifejezetten érdekes része a matematikának, hiszen a mindennapi életben is számtalan helyen találkozunk hálózatokkal. A tudományág újdonságának köszönhetően, tele van izgalmas kérdésekkel, amikkel számos magyar kutató is foglalkozik, valamint feltehetőleg a diplomamunkám témájának is ezt a területet fogom választani.

Hivatkozások

- [1] Roland Molontay. Fractal characterization of complex networks. Master’s thesis, Department of Stochastics, Budapest University of Technology and Economics, 2015.
- [2] Albert-László Barabási, Réka Albert, and Hawoong Jeong. Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 281(1):69–77, 2000.
- [3] Stephen P Borgatti, Ajay Mehra, Daniel J Brass, and Giuseppe Labianca. Network analysis in the social sciences. *Science*, 323(5916):892–895, 2009.
- [4] Marc Vidal, Michael E Cusick, and Albert-Laszlo Barabasi. Interactome networks and human disease. *Cell*, 144(6):986–998, 2011.
- [5] Quan Zhong, Samuel J Pevzner, Tong Hao, Yang Wang, Roberto Mosca, Jorg Menche, Mikko Taipale, Murat Taşan, Barabasi Albert-Laszlo Fan, Changyu, Xiping Yang, et al. An inter-species protein–protein interaction network across vast evolutionary distance. *Molecular Systems Biology*, 12(4):865, 2016.

- [6] Kimmo Soramäki, Morten L Bech, Jeffrey Arnold, Robert J Glass, and Walter E Beyeler. The topology of interbank payment flows. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 379(1):317–333, 2007.
- [7] Worldometers.info. World-o-meters. 2016.
- [8] Worldwidewebsize.com. The size of the world wide web (the internet). 2016.
- [9] 1000 Genomes Project Consortium et al. An integrated map of genetic variation from 1,092 human genomes. *Nature*, 491(7422):56–65, 2012.
- [10] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs i. *Publ. Math. Debrecen*, 6:290–297, 1959.
- [11] Stefan Bornholdt and Heinz Georg Schuster. *Handbook of Graphs & Networks*. Wiley Online Library, 2002.
- [12] John Michael Harris, Jeffrey L Hirst, and Michael J Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory*, volume 2. Springer, 2008.
- [13] Albert-László Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *science*, 286(5439):509–512, 1999.
- [14] Duncan J Watts and Steven H Strogatz. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393(6684):440–442, 1998.
- [15] Béla Bollobás, Oliver Riordan, Joel Spencer, Gábor Tusnády, et al. The degree sequence of a scale-free random graph process. *Random Structures & Algorithms*, 18(3):279–290, 2001.
- [16] Kenneth Falconer. Fractal geometry: mathematical foundations and applications. *John Wiley & Sons*, 2004.
- [17] E Tosatti and L Pietrelli. *Fractals in physics*. Elsevier, 2012.
- [18] Walter G Rothschild et al. *Fractals in chemistry*. Wiley New York, 1998.
- [19] Francesco Sylos Labini and A Gabrielli. Fractals in cosmology. In *CONFERENCE SERIES-INSTITUTE OF PHYSICS*, volume 173, pages 305–308. Philadelphia; Institute of Physics; 1999, 2003.
- [20] Roumen Tsekov. Brownian markets. *Chinese Physics Letters*, 30(8):088901, 2013.
- [21] Ralph Gomory. *Benoit Mandelbrot (1924-2010)*. Nature, 2010.
- [22] Peter E Oppenheimer. Real time design and animation of fractal plants and trees. In *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, volume 20, pages 55–64. ACM, 1986.
- [23] Benoit Mandelbrot. How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 156(3775):636–638, 1967.

- [24] Robert F Cahalan. Overview of fractal clouds. *Advances in Remote Sensing Retrieval Methods*, pages 371–388, 1989.
- [25] Richard F Voss. *Fractals in nature: from characterization to simulation*. Springer, 1988.
- [26] L Benguigui. A fractal analysis of the public transportation system of paris. *Environment and Planning A*, 27(7):1147–1161, 1995.
- [27] Chaoming Song, Shlomo Havlin, and Hernan A Makse. Self-similarity of complex networks. *Nature*, 433(7024):392–395, 2005.
- [28] Hernán D Rozenfeld, Lazaros K Gallos, Chaoming Song, and Hernán A Makse. Fractal and transfractal scale-free networks. In *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, pages 3924–3943. Springer, 2009.
- [29] Pertti Mattila. *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces: fractals and rectifiability*, volume 44. Cambridge University Press, 1999.
- [30] Jurgens H. Peitgen H. O. and Saupe D. Chaos and fractals: New frontiers of science. *Berlin: Springer*, 1993.
- [31] Feder J. *Fractals*. Berlin: Springer, 1988.
- [32] Bunde A. and Havlin S. (ed). *Fractals in Science*. Berlin: Springer, 1995.
- [33] Alexis Monnerot-Dumaine. Covering the coast of great britain by grids of decreasing sizes. *Wikipedia*, November 2010.
- [34] Chaoming Song, Lazaros K Gallos, Shlomo Havlin, and Hernan A Makse. How to calculate the fractal dimension of a complex network: the box covering algorithm. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2007(03):P03006, 2007.
- [35] Aaron Clauset, Cosma Rohilla Shalizi, and Mark EJ Newman. Power-law distributions in empirical data. *SIAM review*, 51(4):661–703, 2009.
- [36] Jensen R. T. and Toft B. (ed). *Graph Coloring Problems*. New York: Wiley–Interscience, 1995.
- [37] Garey M. and Johnson D. Computers and intractability: A guide to the theory of np-completeness. *W. H. Freeman and Company New York*, 1979.
- [38] Chaoming Song, Lazaros K Gallos, Shlomo Havlin, and Hernan A Makse. How to calculate the fractal dimension of a complex network: the box covering algorithm. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2007(03):P03006, 2007.
- [39] Lazaros K. Gallos, Chaoming Song, and Hernan A Makse. A review of fractality and self-similarity in complex networks. *Elsevier*, 2007.

- [40] M. E. J. Newman. Assortative mixing in networks. *Phys. Rev. Lett.*, (208701):89, 2002.
- [41] M. E. J. Newman. Mixing patterns in networks. *Phys. Rev. E*, 67:026126, Feb 2003.
- [42] Gregorio D’Agostino, Antonio Scala, Vinko Zlatić, and Guido Caldarelli. Assortativity effects on diffusion-like processes in scale-free networks. *arXiv preprint arXiv:1105.3574*, 2011.
- [43] Nelly Litvak and Remco Van Der Hofstad. Uncovering disassortativity in large scale-free networks. *Physical Review E*, 87(2):022801, 2013.
- [44] M. E. J. Newman and Juyong Park. Why social networks are different from other types of networks. *Phys. Rev. E*, 68:036122, Sep 2003.
- [45] Chaoming Song, Shlomo Havlin, and Hernan A Makse. Origins of fractality in the growth of complex networks. *Nature Physics*, 2(4):275–281, 2006.
- [46] Romualdo Pastor-Satorras, Alexei Vázquez, and Alessandro Vespignani. Dynamical and correlation properties of the internet. *Phys. Rev. Lett.*, 87:258701, Nov 2001.
- [47] Maksim Kitsak, Shlomo Havlin, Gerald Paul, Massimo Riccaboni, Fabio Pammolli, and H Eugene Stanley. Betweenness centrality of fractal and nonfractal scale-free model networks and tests on real networks. *Physical Review E*, 75(5):056115, 2007.
- [48] M. E. J. Newman. Properties of highly clustered networks. *Phys. Rev. E*, 68:026121, Aug 2003.
- [49] Nelly Litvak and Remco van der Hofstad. Scale-free graph sequences are not disassortative. *arXiv preprint arXiv:1202.3071*, 2012.
- [50] László Lovász and Balázs Szegedy. Limits of dense graph sequences. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 96(6):933–957, 2006.
- [51] Zhenhua Wu, Lidia A Braunstein, Shlomo Havlin, and H Eugene Stanley. Transport in weighted networks: partition into superhighways and roads. *Physical Review Letters*, 96(14):148702, 2006.
- [52] Petter Holme, Beom Jun Kim, Chang No Yoon, and Seung Kee Han. Attack vulnerability of complex networks. *Physical Review E*, 65(5):056109, 2002.
- [53] Hyounghick Kim and Richard Anderson. An experimental evaluation of robustness of networks. *Systems Journal, IEEE*, 7(2):179–188, 2013.
- [54] Reuven Cohen, Keren Erez, Daniel ben Avraham, and Shlomo Havlin. Resilience of the internet to random breakdowns. *Phys. Rev. Lett.*, 85:4626–4628, Nov 2000.

- [55] Réka Albert, Hawoong Jeong, and Albert-László Barabási. Error and attack tolerance of complex networks. *Nature*, 406(6794):378–382, 2000.
- [56] Adilson E Motter, Natali Gulbahce, Eivind Almaas, and Albert-László Barabási. Predicting synthetic rescues in metabolic networks. *Molecular Systems Biology*, 4(1):168, 2008.
- [57] NG Van Kampen. Stochastic processes in chemistry and physics. *Amsterdam: North Holland*, 1:120–127, 1981.
- [58] Li Kuang, Bojin Zheng, Deyi Li, Yuanxiang Li, and Yu Sun. A fractal and scale-free model of complex networks with hub attraction behaviors. *Science China Information Sciences*, 58(1):1–10, 2015.
- [59] Soon-Hyung Yook, Filippo Radicchi, and Hildegardmodo Meyer-Ortmanns. Self-similar scale-free networks and disassortativity. *Physical Review E*, 72(4):045105, 2005.
- [60] Bojin Zheng, Hongrun Wu, Li Kuang, Jun Qin, Wenhua Du, Jianmin Wang, and Deyi Li. A simple model clarifies the complicated relationships of complex networks. *Scientific reports*, 4, 2014.