Minimum követelmény

Analízis 2, 2021/22 II. félév

A definíciók és a tételek témakörök szerinti felsorolásban. Az írásbeli vizsgán az igaz-hamis kérdések ezekből a témakrökből lesznek. A szóbeli vizsgán is ezeket kell tudni (bizonyításokat nem kötelező tudni, de természetesen pozitívan veszem figyelembe, ha valaki tud.)

1. Mértékelmélet.

Algebra, σ-algebra, generált σ-algebra; Borel σ-algebra, a Borel σ-algebra $\mathbb{R}$-en és generátor rendszerei; szorzat σ-algebra, Borel σ-algebrák szorzatai; mérték, méhető tér, mértéktér, σ-véges mérték, példák mértékekre; mérték folytonossági tulajdonsága; majdnem-minenütt fogalma, teljes mérték, mértéktér teljes burka; külső mérték, halmazfüggvény által generált külső mérték, μ^*-mérhető halmazok, Caratheodory tétel, premérték kiterjesztése mértékké, speciálisan a Lebesgue mérték konstrukciója; Borel-mértékek karakterizációja $\mathbb{R}$-en (Lebesgue-Stieltjes mértékek), nyílt és kompakt regularitási tulajdonság; a Lebesgue-mérték eltolás invarianciája, nem Lebesgue-mérhető halmaz létezése; mérhető függvények, folytonosság és Borel-mérhetőség kapcsolata, Borel-mérhető függvények karakterizációja szinthalmazokkal, koordináta függvények mérhetősége, összeg, szorzat mérhetősége, pontonkénti limesz mérhetősége; lépcsős függvények, mérhető függvények közelítése lépcsős függvényekkel; nemnegatív mérhető függvény integrálja, az integrál alaptulajdonságai (linearitás), monoton konvergencia tétel, Fatou lemma; komplex értékű függvények integrálja, az L^1-tér, Lebesgue-féle dominált konvergencia tétel; L^p-terek, Hölder-egyenlőtlenség, Minkowski-egyenlőtlenség, az L^p-tér Banach tér, a lépcsős függvények sűrűn vannak L^p-ben, az L^p duálisa L^q (biz. nélkül).

2. Fourier analízis.

A Fourier transzformált definíciója $L^1(\mathbb{R})$ függvényekre, és alaptulajdoságai (eltolás, átskálázás, derivált, x-szel való szorzás Fourier transzformáltja), Riemann-Lebesgue lemma. A Schwartz tér definícíója, a Fourier transzformáció a Schwartz téren, Parseval (avagy Plancherel) azonosság. A Fourier transzformáció definíciója az $L^2(\mathbb{R})$ téren, linearitás, unitér operátor (számszorosa). A konvolúció defnćiója, konvolúció deriváltja, approximatív egység fogalma.

Fourier sorok $L^1(-\pi, \pi)$ függvényekre komplex (c_n) és valós (a_n, b_n) együtthatókkal. Alaptulajdonságok: eltolás, átskálázás, derivált Fourier sora. Riemann-Lebesgue lemma. Konvergencia az $L^2(-\pi, \pi)$ térben, Parseval azonosság. Dirichlet mag, Fejér mag, Fejér tétele a Fourier részletösszegek átlagának egyenletes konvcergenciájáról, és következményei (a trigonometrikus rendszer ONB, a Fourier egyutthatók meghatározzák a függvényt). Dirichlet tétele szakaszonként folytonosan differenciálható függvényekről.