1. feladatsor, Analízis 2

A K-jelű feladatok könnyűek, azaz tipikusan csak az alapvető definíciókkal kell tisztában lenni a megoldásukhoz. A $*$-gal jelölt feladatok valamilyen értelemben mindig nehezek: vagy trükkös a megoldás, vagy pedig hosszadalmas. A jelöletlen feladatok közepes nehézségűek.

(1) ^{K} Mutassuk meg, hogy ha $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^d$, akkor A Jordan mérhető és $\lambda_J(A) = 0$.

(2) Legyen $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Mutassuk meg, hogy $\lambda_J^*(A) = 1$ de $\lambda_{*,J}(A) = 0$, tehát A nem Jordan mérhető. (Tehát a történetlileg kialakult *Jordan-mérték* elnevezés nem helyes, hiszen igazából *nem mérték*, mert nem σ-additív.)

(3) Mutassuk meg, hogy a Jordan-féle belső mérték definíciójában nem kapunk semmi újat, ha megengedünk megszámlálhatóan sok belső téglát is, azaz $\sup\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(T_n) \ : \ \dot{\cup} T_n \subset A\} = \lambda_{*,J}(A)$.

(4) ^{K} Legyen $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ egy háromelemű halmaz. Adjuk meg az összes σ-algebrát X-en.

(5) ^{K} Mutassuk meg, hogy bármely $\mathcal{A}$ σ-algebra zárt a megszámlálható metszetre, azaz ha $A_n \in \mathcal{A}$, akkor $\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(6) ^{K} Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ egy mértéktér, és $E, F \in \mathcal{M}$. Mutassuk meg, hogy $\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F)$.

(7) ^{K} Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ egy mértéktér, és $E \in \mathcal{M}$. Legyen $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$ bármely $A \in \mathcal{M}$ esetén. Mutassuk meg, hogy μ_E is egy mérték a $(X, \mathcal{M})$ téren.

(8) Legyen X tetszőleges halmaz, és $A \subset X$. Határozzuk meg az
 (a) $\{A\}$
 (b) $\{B : B \subset A\}$
 halmazrendszerek által generált σ-algebrát.

(9) Adjuk meg azon metrikus tereket, ahol a nyílt halmazok σ-algebrát alkotnak.

(10) ^{K} Legyen $f : X \to Y$ tetszőleges függvény. Mutassuk meg, hogy
 (a) ha $\mathcal{B}$ egy σ-algebra Y-ban, akkor $\{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ is σ-algebra X-ben. ("pull-back σ-algebra)
 (b) Ha $\mathcal{A}$ egy σ-algebra X-ben, akkor $\{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ is σ-algebra Y-ban. ("push-forward" σ-algebra)

(11) * Legyen $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a Borel σ-algebra $\mathbb{R}$-en, és legyen $Y \subset \mathbb{R}$ tetszőleges halmaz. Mutassuk meg, hogy Y-ban a Borel σ-algebra éppen $\mathcal{B}(Y) = \{A \cap Y : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$.

2. feladatsor, Analízis 2.

(12) Legyen $A \subset \mathbb{R}^d$. A Jordan-féle külső mérték definíciójában véges sok téglával fedtük le A-t. Ehelyett a *Lebesgue-féle külső mérték* definíciójában megengedünk megszámlálható sok téglát:
$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} m(T_i) : A \subset \cup_{i=1}^{\infty} T_i\}$,
ahol $m(T_i)$ a T_i tégla oldalainak szorzata. Mutassuk meg, hogy ezzel tényleg a Jordan-külső mértéktől eltérő fogalmat kapunk. Konkrétan, ha $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, akkor $\lambda^*(A) = 0$.

(13) ^{K} Legyen $\mathcal{A}_0$ azon $\mathbb{R}^n$-beli halmazok családja, amelyek előállnak véges sok diszjunkt $\prod_{j=1}^n (a_i, b_i]$ alakú tégla uniójaként. Legyen $\mathcal{A}_1$ azon $\mathbb{R}^n$-beli halmazok családja, amelyek előállnak véges sok (nem feltétlenül diszjunkt) $\prod_{j=1}^n (a_i, b_i]$ alakú tégla uniójaként. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1$, és ez egy algebra, de nem σ-algebra.

(14) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$-en a Lebesgue-mérték *kívülről nyílt reguláris*, azaz minden mérhető E halmazra $\lambda(E) = \inf\{\lambda(U) : U \supset E, U \text{ nyilt}\}$.

(15) Mutassuk meg, hogy $\mathbb{R}^n$-en a Lebesgue-mérték *belülről kompakt reguláris*, azaz minden mérhető E halmazra $\lambda(E) = \sup\{\lambda(K) : K \subset E, K \text{ kompakt}\}$.

(16) ^{K} Legyen $A \subset \mathbb{R}^n$ olyan halmaz, amelynek Lebesgue külső mértéke 0. Mutassuk meg, hogy A Lebesgue mérhető, és $\lambda(A) = 0$. (Hint: használjuk a definíciót, A jól vág letté.)

(17) ^{K} Legyen X a sík egységnégyzete, és $\mathcal{E}$ a $T_{ab} = \{(x,y) \in X : 0 \le a \le x \le b \le 1, 0 \le y \le 1\}$ alakú téglalapok családja. Legyen $\nu : \mathcal{E} \to [0,1]$, $\nu(T_{ab}) = b - a$. Legyen μ^* a ν által generált külső mérték. Mutassuk meg, hogy a $D = \{(x,y) \in X : x = y\}$ halmaz nem mérhető.

(18) * Legyenek $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{M})$ mérhető terek, és legyen $T \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{M}$ egy mérhető halmaz a szorzat σ-algebrában. Mutassuk meg, hogy a keresztmetszetek $T_x = \{y \in Y : (x,y) \in T\}$ és $T_y = \{x \in X : (x,y) \in T\}$ mérhetőek minden $x \in X$ és $y \in Y$ esetén.

(19) ^{K} Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ egy mértéktér, és legyen $\mathcal{N} = \{N \in \mathcal{A} : \mu(N) = 0\}$, és $\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{A}, F \subset N \text{ valamely } N \in \mathcal{N}\text{−re}\}$. Mutassuk meg, hogy $\overline{\mathcal{M}}$ szintén egy σ-algebra.

(20) Az előző feladatban legyen $\overline{\mu}(E \cup F) = \mu(E)$. Mutassuk meg, hogy $\overline{\mu}$ egy teljes mérték $\overline{\mathcal{M}}$-on. (Az $(X, \overline{\mathcal{M}}, \overline{\mu})$ mértéktér az $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *teljes burka*).

(21) A Caratheodory kiterjesztési tétel bizonyításában fogadjuk el, hogy a μ^*-mérhető halmazok σ-algebrát alkotnak, amelyen μ^* egy mérték. Mutassuk meg, hogy ez a mérték valóban teljes, ahogy a tétel állítja.

3. feladatsor, Analízis 2.

A feladatokban λ a Lebesgue-mértéket jelöli.

(22) ^{K} Mutassuk meg, hogy ha $E \subset [0,1]$, $\lambda(E) = 1$, akkor E sűrű $[0,1]$-ben. (Hint: ha nem sűrű, akkor a mértéke kisebb, mint 1.)

(23) * Legyen $H \subset \mathbb{R}$, $\lambda(H) = 0$. Mutassuk meg, hogy létezik olyan $c \in \mathbb{R}$ amelyre minden $c + h$ $(h \in H)$ irracionális.

(24) ^{K} Mutassuk meg, hogy a Lebesgu-mérték eltolásinvariáns, azaz minden $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ esetén $\lambda(A) = \lambda(t + A)$. (Hint: Már a Lebesgue külső-mérték is eltolásinvariáns, a definíciójából adódóan.)

(25) Mutassuk meg, hogy a Cantor halmaz kompakt, sehol sem sűrű, Lebesgue-mértéke 0, és a számossága kontinuum.

(26) Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmazt G_δ-halmaznak nevezünk ha H előáll megszámlálható sok nyílt halmaz metszeteként. Egy $T \subset \mathbb{R}^n$ halmazt F_σ-halmaznak nevezünk ha T előáll megszámlálható sok zárt halmaz uni'ojaént. Legyen $E \subset \mathbb{R}^n$ véges Lebesgue-mértékű halmaz. Mutassuk meg, hogy létezik olyan H G_δ-halmaz és T F_σ halmaz, amelyekre $T \subset E \subset H$ és $\lambda(H \setminus T) = 0$.

(27) ^{K} Legyen μ egy véges Borel mérték $\mathbb{R}$-en (azaz egy véges mérték $\mathbb{R}$ Borel halmazain). Legyen $F(x) = \mu((-\infty, x])$. Mutassuk meg, hogy F monoton növő, jobbról folytonos függvény. (F-et nevezzük μ *eloszlásfüggvényének*.)

(28) ^{K} Legyen $F(x) = 0$ ha $x < 0$, és $F(x) = 1$ ha $x \geq 0$. Kövessük végig az F által generált μ_F Lebesgue-Stiletjes mérték konstrukcióját, és mutassuk meg, hogy $\mu_F = \delta_0$.

(29) Bizonyítsuk be a Borel-Cantelli lemmát: "ha A_i olyan események, hogy a bekövetkezési valószínűségeik összege véges, akkor 0 annak a valószínűsége, hogy végtelen sok bekövetkezik belőlük". Formálisan, ha μ egy valószínűségi mérték egy $\mathcal{A}$ σ-algebrán, és $A_i \in \mathcal{A}$ olyanok, hogy $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < +\infty$ akkor $\mu(\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\geq n} A_k) = 0$. (Mutassuk meg először, hogy $\cap_{n\in\mathbb{N}} \cup_{k\geq n} A_k$ pontosan azt az eseményt írja le, hogy végtelen sok A_i következik be.)

4. feladatsor, Analízis 2.

(30) ^{K} Legyenek $(X, \mathcal{A}), (Y_1, \mathcal{M}_1), (Y_2, \mathcal{M}_2)$ mérhető terek. Mutassuk meg, hogy egy $f = (f_1, f_2) : X \to Y_1 \times Y_2$ függvény pontosan akkor $\mathcal{A} - \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ mérhető, ha f_1 $\mathcal{A} - \mathcal{M}_1$ mérhető, és f_2 $\mathcal{A} - \mathcal{M}_2$ mérhető. (Egyszerűen használjuk a szorzat σ-algebra definícióját.)

(31) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton növő függvény. Mutassuk meg, hogy f mérhető.

(32) ^{K} Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktér, és legyenek $f, g : X \to \mathbb{R}$ olyan függvények, hogy $f = g$ μ-majdnem-minenütt. Mutassuk meg, hogy ha f mérhető, akkor g is az.

(33) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mérhető függvény, és $g(x) = \|f(x)\|_\infty$. Mutassuk meg, hogy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ szintén mérhető.

(34) Legyen $f \in L^+$. Mutassuk meg, hogy $\int_X f d\mu = 0$ pontosan akkor teljesül, ha $f(x) = 0$ μ-majdnem minden $x \in X$ esetén.

(35) ^{K} Legyen $f_1, f_2 \in L^+$. Az integrál definícióját használva mutassuk meg, hogy $\int (f_1 + f_2) d\mu = \int f_1 d\mu + \int f_2 d\mu$. (Ehhez nézzük meg az integrál definícióját az előadásról.)

(36) ^{K} Legyen $X = \mathbb{N}$, és μ a számláló mérték (azaz $\mu(A) = |A|$ ha A véges, és $\mu(A) = \infty$ ha A végtelen). Mutassuk meg, hogy ekkor L^+ nem más, mint a nemnegatív sorozatok halmaza, és $f = (a_n) \in L^+$ esetén $\int_X f d\mu = \sum_{n=0}^\infty a_n$.

(37) ^{K} Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, és $\mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_n \le \ldots$ mértékek rajta. Mutassuk meg, hogy $\mu(E) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(E)$ szintén mérték $(X, \mathcal{A})$-n. (Hint: Használjuk az előző feladatot és a monoton konvergencia tételt.)

(38) ^{K} Mutassunk olyan példát, ahol $f_n \in L^+$, $f_n(x) \to f(x)$ minden $x \in X$, de $\int f \ne \lim_{n\to\infty} \int f_n$.

5. feladatsor, Analízis 2.

(39) ^{K} Mutassuk meg, hogy $\int_0^1 x^a(1-x)^{-1}\log x dx = -\sum_{k=1}^{\infty}(a+k)^{-2}$ minden $a > -1$ esetén. (Hint: $(1-x)^{-1}$ sorfejtése után Beppo-Levi.)

(40) ^{K} Számoljuk ki: $\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-2x}(1+\frac{x}{n})^n dx$. (Hint: Lebesgue dominált konvergencia tétel, vagy Beppo-Levi, mindenhogy kijön.)

(41) ^{K} Számoljuk ki: $\lim_{n\to\infty}\int_1^n \frac{\pi+2x^2\arctan(nx)}{x^4(2-2^{-n})+\sin\frac{1}{n}}dx$. (Hint: Lebesgue dominált konvergencia tétel.)

(42) ^{K} Számoljuk ki: $\lim_{n\to\infty}\int_1^{\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}dx$, és $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{n}{1+n^2x^2}dx$. (Hint: mindkét esetben egy egyszerű helyettesítéses integrálással ki lehet számolni a pontos értéket. De nézzük meg azt is (tanulságos), hogy melyik esetben használható a Lebesgue dominált konvergencia tétel.)

(43) ^{K} Számoljuk ki: $\int_0^{\infty}\frac{n\sin(x/n)}{x(x^2+1)}dx$. (Hint: $t = x/n$ esetén $\frac{\sin t}{t} \to 1$, és aztán Lebesgue dominált konvergencia tétel.)

(44) ^{K} Számoljuk ki: $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{nx^n}{1+x}dx$. (Hint: parciálisan integrláljunk, aztán Lebesgue dominált konvergencia tétel.)

(45) ^{K} Számoljuk ki: $\int_{x=0}^1\int_{y=x}^1 x\frac{\sinh y}{y}dydx$. (Hint: Fubini.)

(46) Legyen $F(x) = \arctan(2x+1)$ ha $x < 0$ és $F(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ ha $x \geq 0$. Legyen μ az F által generált Lebesgue-Stieltjes mérték, azaz $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$. Számoljuk ki: $\int_{-1}^1(2+x)d\mu$. (Hint: ne feledkezzünk meg F-nek a 0-beli ugrásáról.)

(47) ^{K} Mutassuk meg, hogy ha $f, g \in L^1$, akkor $f + g \in L^1$.

6. feladatsor (összefoglaló), Analízis 2.

(48) ^{K} Legyen $A_1 = [0,3)$, $A_2 = (1,4)$. Határozzuk meg $\mathbb{R}$-ben az A_1, A_2 halmazok által generált σ-algebrát.

(49) ^{K} Legyenek $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{M})$ mérhető terek. Legyen $\mathcal{N} = \{E \subset X \cap Y : E \in \mathcal{A} \cap \mathcal{M}\}$. Igaz-e, hogy $\mathcal{N}$ is σ-algebra $X \cap Y$-on?

(50) ^{K} Legyen $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$. Mutassuk meg, hogy A Borel mérhető halmaz (azaz benne van az $\mathbb{R}^2$-beli Borel σ-algebrában).

(51) ^{K} Mutassuk meg, hogy ha $U \subset \mathbb{R}^n$ nem-üres nyílt halmaz, akkor $\lambda(U) \neq 0$.

(52) ^{K} Legyen H Borel halmaz $\mathbb{R}$-ben. Mutassuk meg, hogy $\lambda(-H) = \lambda(H)$. (Hint: A Lebesgue-féle külső mértékre igaz ez a tulajdonság a definícióból adódóan.)

(53) ^{K} Legyen $F(x) = \arctan(2x+1)$ ha $x < 0$ és $F(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ ha $x \geq 0$. Legyen μ az F által generált Lebesgue-Stieltjes mérték, azaz $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$. Mennyi $\mu([-1,0))$, és $\mu([0,1])$?

(54) ^{K} Legyenek $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ mérhető függvények. Mutassuk meg, hogy ekkor $h(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$ is mérhető (ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a szokásos skaláris szorzást jelöli).

(55) ^{K} Jelölje szokásosan $t \in \mathbb{R}$ esetén δ_t a t-re helyezett Dirac mértéket. Legyen $\mu = \delta_{-1} + \delta_1$, és $\nu = \delta_0 + \delta_2$. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-n a $\mu \times \nu$ szorzatmértéket. Mennyi lesz a $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$ körlap mértéke $\mu \times \nu$ szerint?

(56) ^{K} Számoljuk ki: $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx^n}{\cos x} dx$. (Hint: parciálisan integrláljunk, aztán Lebesgue dominált konvergencia tétel.)

(57) Számoljuk ki: $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1}{(1+\frac{x}{n})^n \sqrt[n]{x}} dx$. (Hint: számoljuk ki a pontonkénti limeszt minden $x > 0$-ra, aztán LD.)

(58) Mutassuk meg, hogy $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x} \sin x dx = \pi/4$. (Hint: alkalmazzuk Fubinit az $e^{-xy} \sin x$ függvényre.)

(59) Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, $f \in L+$, és $\nu(E) = \int_E f d\mu$ minden $E \in \mathcal{M}$-re. Láttuk, hogy ekkor ν is mérték. Mutassuk meg, hogy minden $g \in L^+$ esetén $\int g d\nu = \int f g d\mu$. (Ezt használtuk ki a (46) feladatnál. Hint: tegyük fel először, hogy g lépcsős függvény.)

7. feladatsor, Analízis 2.

(60) ^{K} Legyen $1 \leq p < q < +\infty$. Mutassunk olyan konkrét $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, amelyekre $f \in L^p(\mathbb{R}), f \notin L^q(\mathbb{R})$, és $g \in L^q(\mathbb{R}), g \notin L^p(\mathbb{R})$. Azaz $L^p(\mathbb{R})$ és $L^q(\mathbb{R})$ semelyik irányban nem tartalmazzák egymást. (Hint: az x^α függvényt megszorítjuk megfelelő tartományra, megfelelő α-val.)

(61) ^{K} Legyen $1 \leq p < q < +\infty$. Az előző feladattal ellentétben mutassuk meg, hogy $L^q[0,1] \subset L^p[0,1]$. (Hint: egy $f \in L^q[0,1]$ esetén bontsuk fel a $[0,1]$ intervallumot aszerint, hogy hol nagyobb a függvény 1-nél, és hol kisebb-egyenlő, majd mutassuk meg, hogy mindkét részen a p-dik hatvány integrálja véges.)

(62) * Az előző feladatnál több is igaz: tegyük fel, hogy $\mu(X) < +\infty$. Mutassuk meg, hogy $1 \leq p < q < \infty$ esetén $L^q(X) \subset L^p(X)$, és $\|f\|_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$. (Hint: Az f és a konstans 1 függvényekre alkalmazzuk Höldert megfelelő exponensekkel.)

(63) ^{K} Legyen $1 \leq p < +\infty$. Mutassuk meg, hogy a lépcsős függvények sűrűn vannak az $L^p(\mathbb{R})$ térben. (Hint: ha $f \in L^p(\mathbb{R})$ nemnegatív, közelítsük lépcsős függvényekkel az órán tanult tétellel alulról. Az általános esetben pedig $f = f^+ - f^-$.)

(64) ^{K} Legyen $1 \leq p < +\infty$. Mutassuk meg, hogy a kompakt tartójú, sima függvények sűrűn vannak az $L^p(\mathbb{R})$ térben. (Hint: egy $f \in L^p(\mathbb{R})$ függvényt először közelítsünk lépcsősekkel, utána minden lépcsőt simával.)

(65) Legyenek p, q konjugált kitevők, (azaz $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$), és legyen $h \in L^q(X)$. Definiáljunk egy $\phi_h : L^p(X) \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionált: $\phi_h(f) = \int_X f(x)h(x)d\mu(x)$. Mutassuk meg, hogy ϕ_h korlátos lineáris funkcionál, és $\|\phi_h\| \leq \|h\|_q$. (Hint: definíció szerint $\|\phi_h\| = \sup\{|\phi_h(f)| : \|f\|_p = 1\}$, és Hölderből pont kijön. Megjegyzés: az L^p, L^q dualitási tételt fogjuk venni, amely szerint $\|\phi_h\| = \|h\|_q$.)

(66) ^{K} Legyen $p = 3$, és definiáljunk egy $\phi : L^p[0,1] \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionált: $\phi(f) = \int_0^1 f(x)(1 + x^2)dx$. Mennyi $\|\phi\|$? (Hint: használjuk az előző feladat utáni megjegyzést.)

8. feladatsor, Analízis 2.

(67) ^{K} Mutassuk meg, hogy az $F(t) = \int_0^\infty e^{-tx}dx$ függvény végtelen sokszor differenciálható $(0, +\infty)$-en, és számoljuk ki $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx$ értékét. (Hint: be lehet deriválni az integráljel mögé.)

(68) A Schwartz tér:
$S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall p, q \in \mathbb{N}, x^p D^q f(x) \to 0 \ (|x| \to \infty)\}$.
Mutassuk meg, hogy ekvivalens definíciót kapunk így is:
$S(\mathbb{R}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall p, q \in \mathbb{N}, \|x^p D^q f(x)\|_\infty < +\infty\}$. (Hint: ha valamilyen $p.q$-ra nem tartana 0-hoz, akkor x-szel rászorozva $\|x^{p+1} D^q f(x)\|_\infty$ már nem lenne véges.)

(69) Mutassuk meg, hogy $f \in S(\mathbb{R})$ esetén minden $p, q \in \mathbb{N}$-re $\|D^p x^q f(x)\|_1 < +\infty$. (Hint: a szorzat többszörös deriválása után minden tagot becsülhetünk.)

(70) Mutassuk meg, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$. (Hint: Az $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$ integrált számoljuk ki polárkoordinátákra áttérve. Ez már szerepelhetett Kalkulusból, vagy valszámból.)

(71) Mutassuk meg, hogy $e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$, és számoljuk ki a Fourier transzformáltját, $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x)dx$. (Hint: $e^{-x^2} \in S(\mathbb{R})$ könnyű, a Fourier transzformálthoz pedig használjunk komplex vonalintegrált megfelelő úton, és az előző feladat eredményét.)

(72) ^{K} Legyen $f \in S(\mathbb{R})$, $\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx$. Mutassuk meg, hogy $\hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$. Mutassuk meg, hogy ha f valós értétkű, akkor $\hat{f}$ konjugáltan szimmetrikus (azaz $\hat{f}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$), és fordítva, ha f konjugáltan szimmetrikus, akkor $\hat{f}$ valós értékű. Mutassuk meg, hogy ha f valós értékű, páros függvény, akkor $\hat{f}$ szintén valós értékű, páros, és $\hat{\hat{f}} = 2\pi f$. (Hint: inverziós formula).

(73) ^{K} Mutassuk meg, hogy ha $f \in L^1(\mathbb{R})$, és $g(x) = af(ax)$, akkor $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\frac{\xi}{a})$. (Hint: direkt számolás.)

(74) ^{K} Számoljuk ki az alábbi függvények Fourier transzformáltját:
$f(x) = \mathbf{1}_{[-a,a]}$ (speciálisan nézzük meg a $[-1, 1]$ esetet), $g(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}$, $h(x) = e^{-|x|}$.

(75) Az előző feladat segítségégével számoljuk ki $a > 0$ esetén a következő függvények Fourier transzformáltját:
$f(x) = \frac{a}{x^2+a^2}$,
$f(x) = \left(\frac{\sin ax}{x}\right)^2$

9. feladatsor, Analízis 2.

(76) ^{K} Legyenek $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy $|f * g(x)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. (Hint: Cauchy-Schwarz.)

(77) ^{K} Legyen $f \in L^1(\mathbb{R})$, és $|g(x)| \leq K$ minden x-re. Mutassuk meg, hogy $|f * g(x)| \leq K\|f\|_1$ minden x-re. (Hint: triviális direkt számolás.)

(78) ^{K} Legyenek $f, g \in S(\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy $f * g$ differenciálható, és $(f * g)' = f' * g = f * g'$. (Hint: dirdekt számolás. Tanulság: a konvolúció örökli az egyes függvények simasági tulajdonságait.)

(79) ^{K} Legyen $g(x) = e^{-x^2}$, és legyen $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g(\frac{x}{\varepsilon})$. Rajzoljuk fel a $g(x)$, $g_{0.01}(x)$, és $g_{100}(x)$ függvények grafikonját. (Tanulság: kicsi ε-ra g_e a 0 körül kicsúcsosodik, aztán gyorsan lelapul.)

(80) * Legyen $f \in L^2(\mathbb{R})$, $g \in S(R)$, $\int_{\mathbb{R}} g = 1$. Mutassuk meg, hogy $f * g(x)$ véges minden $x \in \mathbb{R}$-re, $f * g$ sima függvény, és $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} g(\frac{x}{\varepsilon})$ jelöléssel $\varepsilon \to 0$ esetén $f * g_e \to f$ az L^2 normában. (Tanulság: a kicsúcsosodó g_ε függvényekkel konvolválva f-et az eredmény egy sima közelítése lesz f-nek. Ezért a g_ε függvényeket approximatív egységnek szokás nevezni.)

(81) * Mutassuk meg, hogy minden $n \in \mathbb{N}$-re és minden $x \in \mathbb{R}$-re $\left|(\frac{d}{dx})^n(\frac{\sin x}{x})\right| \leq \frac{1}{n+1}$. (Hint: Fourier transzformáljuk az egyenlet bal oldalát.)

(82) Mutassuk meg, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t \sin 2t}{t^2} dt = \pi$. (Hint: Parseval avagy Plancherel formula.)

(83) Legyen $f \in S(\mathbb{R})$. Oldjuk meg az $u'' - u = f$ differencálegyenletet. (Hint: Fourier transzformáljuk az egyenlet mindekét oldalát.)

10. feladatsor, Analízis 2.

Ezekben a feladatokban minden függvény 2π-periodikusnak van feltételezve. A Fourier együtthatókra néha a c_k, néha az $\hat{f}(k)$ jelölést használjuk, azaz $c_k = \hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)dx$.

(84) ^{K} Legyen $f(x) = x$, ha $-\pi \leq x < \pi$. Számoljuk ki f Fourier sorát. (Egyaránt a c_n komplex együtthatókat, és az a_n, b_n valós együtthatókat.)

(85) ^{K} Legyen $f(x) = |x|$, ha $-\pi \leq x < \pi$. Számoljuk ki f Fourier sorát. (Egyaránt a c_n komplex együtthatókat, és az a_n, b_n valós együtthatókat.) Mutassuk meg, hogy a Fourier sor egyenletesen konvergens. Az $x = 0$ helyet megnézve számoljuk ki a $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ értékét.

(86) ^{K} Legyen $f(x) = 1 + \cos x - 4\sin 2x$, ha $-\pi \leq x < \pi$. Számoljuk ki f Fourier sorát. (Egyaránt a c_n komplex együtthatókat, és az a_n, b_n valós együtthatókat.) Mit veszünk észre?

(87) ^{K} Jelölje $s_N(x)$ a Fourier sor n-dik részletösszegét, azaz $s_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx}$. Jelölje $D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx}$ az úgynevezett Dirichlet magfüggvényt. Mutassuk meg, hogy $s_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) D_N(y)dy$.

(88) Lássuk be a fenti Dirichlet magfüggvény zárt alakját: $D_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}$.

(89) Ábrázoljuk a $D_N(x)$ magfüggvényt. (Nagy kicsúcsosodás a 0 körül, és aztán lecseng, de váltogatja az előjelét.)

(90) * Mutassuk meg, hogy $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 2\pi$ minden n-re, de $\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)|dt \to +\infty$, ha $n \to \infty$.

(91) Mutassuk meg, hogy ha $f \in L^2(-\pi,\pi)$ akkor $f \in L^1(-\pi,\pi)$, és $\|f\|_1 \leq \sqrt{2\pi}\|f\|_2$.

(92) ^{K} Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ n-szer folytonosan differenciálható, 2π-periodikus függvény. Mutassuk meg, hogy minden $k \in \mathbb{Z}$-re $\widehat{f^{(n)}(k)} = (ik)^n \hat{f}(k)$. (Teljesen hasonló volt a képlet a Fourier transzformációnál is a deriváltakra. Tanulság: minél simább a függvény, annál gyorsabban tartanak 0-hoz a Fourier egütthatók.)

11. feladatsor, Analízis 2.

(93) ^{K} Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy 2π-periodikus függvény. Mutassuk meg, hogy minden $a \in \mathbb{R}$-re $\int_a^{a+2\pi} f(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$.

(94) ^{K} Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy 2π-periodikus függvény, és legyen $g(t) = f(t-y)$. Mutassuk meg, hogy $\hat{g}(k) = e^{-iky}\hat{f}(k)$. (Tanulság: eltolás a fuggvény oldalon egy fázissal való szorzást eredményez a Fourier oldalon.)

(95) Lássuk be a Fejér-mag zárt alakját: $K_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{n+1}(\sum_{k=0}^{n} e^{i(k-\frac{n}{2})t})^2 = \frac{1}{n+1}(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}})^2$.

(96) ^{K} Rajzoljuk fel a K_n Fejér magot nagy n esetén. (Nagy kicsúcsosodás a 0 körül, és aztán lecseng, de végig nemnegatí!) Mutassuk meg, hogy $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)dx = 2\pi$.

(97) Mutassuk meg, hogy az $f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$ alakú függvények ($n = 1, 2, 3\ldots$) ortonormált bázist alkotnak az $L^2[0,\pi]$ térben, és minden $f \in L^2[0,\pi]$ függvény kifejthető $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ alakban, ahol $c_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi} f(t)\sin ntdt$. (Hint: $f \in L^2[0,\pi]$ esetén terjesszük ki f-et $[-\pi,\pi]$-re páratlanul, aztán fejtsük Fourier sorba.)

(98) * Legyen $f : [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, és tegyük fel, hogy valamely $c > 0$-val $|\hat{f}(r)| \geq \frac{c}{|r|}$ teljesül minden $r \neq 0$-ra. Legyen P_n legfeljebb n-ed fokú trigonometrikus polinomok egy sorozata, $P_n(x) = a_0 + \sum_{r=1}^{n}(a_r\cos 2\pi rx + b_r\sin 2\pi rx)$. Mutassuk meg, hogy P_n nem tudja "nagyon jól" egyenletesen közelíteni f-et, azaz létezik olyan $c' > 0$, hogy minden n-re $\|f - P_n\|_\infty \geq \frac{c'}{n}$.

(99) * Legyen $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, és $f(0) = f(1) = 0$. Mutassuk meg, hogy $\int_0^{\pi} |f(t)|^2 \leq \int_0^{\pi} |f'(t)|^2$. (Ez a Wirtinger-egyenlőtlenség.)

12. feladatsor (összefoglaló), Analízis 2.

(100) ^{K} Legyen $F(x) = e^{2x}$ ha $x < 0$ és $F(x) = \frac{4x+3}{x+1}$ ha $x \geq 0$. Legyen μ az F által generált Lebesgue-Stieltjes mérték, azaz $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$. Számoljuk ki: $\int_{-1}^{2}(3+x)d\mu$. (Hint: ne feledkezzünk meg F-nek a 0-beli ugrásáról.)

(101) Legyen $f(x) = \frac{\sin x}{|x|^{3/2}}$, $g(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$. Döntsük el, hogy f, g közül melyik függvény van $L^1(\mathbb{R})$-ben, illetve $L^2(\mathbb{R}$-ben.

(102) Legyen $1 \leq p \leq q \leq r < +\infty$. Mutassuk meg, hogy ha $f \in L^p(\mathbb{R})$ és $f \in L^r(\mathbb{R})$, akkor $f \in L^q(\mathbb{R})$.

(103) Legyen $1 \leq p < +\infty$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, és $f_y(t) = f(t-y)$. Mutassuk meg, hogy $\lim_{y\to 0} \|f - f_y\|_p \to 0$. Ezt is használtuk a 80 feladat megoldásánál. (Hint: már lényegében elmondtam, először mutassuk meg kompat tartójú folytonos függvényekre, aztán ilyenekkel közelítsük f-et).

(104) Legyen $1 < p, q < +\infty$, konjugált exponensek (azaz $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), és $f \in L^p(\mathbb{R})$, $g \in L^q(\mathbb{R})$. Mutassuk meg, hogy $f * g(x)$ minden x-re létezik, és $|f * g(x)| \leq \|f\|_p \|g\|_q$. (Hint: Hölder.)

(105) Mutassuk meg, hogy ha $f \in S(\mathbb{R})$, akkor minden $1 \leq p < +\infty$ esetén $f \in L^p(\mathbb{R})$.

(106) Számoljuk ki az alábbi függvények Fourier transzformáltját:

$f(x) = \mathbf{1}_{[10,30]}$, $g(x) = xe^{-9x^2}$, $h(x) = \frac{1}{x^2+2x+2}$. (Hint: direkt számolás helyett gyakran érdemes már ismert eredményekből kiindulva eltolással, skálázassal, deriválśsal dolgozni.)

(107) Legyen $f \in S(\mathbb{R})$ valós értékű, páros függvény, és legyen $g = f*f$. Mutassuk meg, hogy $\hat{g}$ szintén valós értékű, páros függvény, ráadásul $\hat{g}$ nemnegatív is.

(108) Legyen $g(x) = \sin^2(x)$, valamint $f(x) = -1$, ha $-\pi \leq x < 0$, és $f(x) = 1$, ha $0 \leq x < \pi$. Számoljuk ki g és f Fourier sorát. (Egyaránt a c_n komplex együtthatókat, és az a_n, b_n valós együtthatókat.)

(109) Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ π-periodikus függvény. Mutassuk meg, hogy f Fourier sorában csak páros indexű tagok szerepelnek.

(110) Mutassuk meg, hogy a Fejér magra teljesül, hogy minden $\delta > 0$-ra és minden $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan N_0, hogy minden $N \geq N_0$-ra $K_N(x) < \varepsilon$ minden $x \in [-\pi, \pi] \setminus [-\delta, \delta]$ esetén. (Azaz a Fejér mag egyenletesen lecseng 0-hoz $[-\delta, \delta]$-n kívül.

(111) Legyen $f \in L^2[-\pi, \pi]$. Mutassuk meg, hogy $|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$ végtelen sokszor teljesül. (Hint: Parseval.)