Neumann János szerepe a Hilbert terek elméletének megalapozásában

Matolcsi Máté

2003. július 30.

Neumann János születése 100. évfordulójának tiszteletére

1. Az absztrakt Hilbert tér

Jól ismert tény, hogy Neumann János szerteágazó munkássága során olyan - azóta meghatározóvá vált - tudományágak alapjait fektette le, mint a kvantummechanika, számítástechnika és játékelmélet. Neumann személye olyannyira nagy hatást gyakorolt az emberiség fejlődésére, hogy a Financial Times 1999. december 24-i számában egyenesen az "Évszázad Emberének" (Man of the Century) kiáltotta ki. Neumann kiterjedt munkássága egy-egy szeletének bemutatására már már több írás irányult lásd [1], [2] és részben [3]). Ebben a cikkben arra vállalkozunk, hogy betekintést adjunk Neumann matematikai munkásságának azon részébe, amelyben az absztrakt Hilbert terek elméletének alapjait fektette le. Az itt tárgyalt absztrakt fogalmakat és tételeket Neumann később a kvantummechanika matematikai modelljének megalapozásában használta fel (lásd [4]). Megjegyezzük, hogy a cikkben tárgyalt eredmények sorrendje helyenként eltér a történeti időrendiségtől.

Természetesen a *konkrét* Hilbert terek behatóbb vizsgálata jóval Neumann munkásságának kezdete előtt, a XX. század elején, közvetlenül a Lebesgue-féle integrálfogalom megjelenése után megkezdődött. A Lebesgue integrál lehetővé tette az $L^p(\Omega)$-terek definiálását (itt $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ "megfelelő" halmaz), a Riesz-Fischer tétel pedig kimondta ezen terek teljességét (azaz, mai szóhasználattal élve, biztosította, hogy ezek a terek *Banach terek*). Különösen fontos szerep jutott a $p = 2$ esetnek, hiszen ebben az esetben ki lehetett használni az $L^2(\Omega)$-beli teljes orotnormált függvénysorozat létezését, és az eszerinti Fourier-sorfejtés igen hasznos eszköznek bizonyult differenciál- és integrálegyenletek megoldásakor. Egy $L^2(\Omega)$-beli f (általában komplex értékű) függvényt tehát helyettesíthetünk f-nek egy rögzített ortonormált bázisra vonatkozó $a_1, a_2, \ldots$ koordinátáival, és ezzel az azonosítással az egész $L^2(\Omega)$ teret megfeleltethetjük az úgynevezett *Hilbert-féle koordináta tér*nek, azaz az olyan $a_1, a_2, \ldots$ sorozatok terének, amelyekre $\sum |a_j|^2 < \infty$ (erre a sorozattérre ma már inkább a l^2 elnevezés használatos). Ebben a formalizmusban a l^2 tér egy *lineáris operátorának* egy végtelen mátrix felel meg, és általában igen nehéz eldönteni, hogy egy mátrix *folytonos* transzformációt ír-e le. A l^2 térnek és folytonos operátoraniak beható vizsgálata elsősorban Hilbert nevéhez fűződik; az elmélet sarokkövének tekinthető spektráltételt is neki sikerült először bebizonyítani (lásd [5]). Láthatjuk, hogy már maga a l^2 tér is absztrakció során jött létre, hiszen a konkrét függvényeket számsorozatokkal helyettesítettük. Ha arra gondolunk azonban, hogy a l^2 formalizmusban egy olyan egyszerű művelet, mint két lineáris transzformáció kompozíciója két végtelen mátrix összeszorzásának felel meg, akkor megérthetjük, hogy még az egyszerűbb tételek bizonyítása is jelentős technikai nehézségekkel járt, és gyakran nehéz volt kiigazodni a koordináták és indexek sűrűjében. Ebben a helyzetben Neumann volt az, aki felismerte, hogy létezik egy átláthatóbb absztrakt tárgyalásmód, amellyel a bizonyítások elegánsabbá válnak, és az új formalizmus segítségével új meghatározó eredmények kaphatók. A további absztrakció lényege, hogy a koordinátáktól úgy szabadulhatunk meg, hogy nem rögzítjük eleve a térnek egy ortonormált bázisát.

Neumann összegezte, hogy mik azok a meghatározó absztrakt tulajdonságok, amelyek az $L^2(\Omega)$ valamint a l^2 teret jellemzik, és ezután ezekkel a tulajdonságokkal definiálta az *absztrakt* Hilbert teret (lásd [6]). Módszerének lényege, hogy ezután már csak ezeket a definiáló tulajdonságokat használta, és így indította el a Hilbert terek absztrakt elméletének fejlődését. Neumann a következő öt tulajdonsággal definiálta az absztrakt H Hilbert teret ([6]):

A. H komplex vektortér.

B. H-n adott egy skalárszorzat, azaz egy kétváltozós, pozitív definit, Hermit-féle szeszkvilineáris forma. Tehát $a \in \mathbb{C}$ és $f, g \in H$ esetén $(af, g) = a(f, g)$, $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$, $(f, g) = \overline{(g, f)}$ és $(f, f) \geq 0$ és egyenlőség akkor és csak akkor áll, ha $f = 0$.

C. Az $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ által definiált normált tér szeparábilis.

D. H nem véges dimenziós.

E. A fent adott normával H teljes (azaz minden Cauchy sorozat konvergens).

Itt néhány megjegyzést illik tennünk: A ma is használatos absztrakt definíció annyiban tér el a fentiektől, hogy nem szokás eleve kizárni a véges dimenziós, illetve nem szeparábilis tereket (azaz nem szokás kikötni a C és D feltételeket). Gyakorlati szempontból azonban továbbra is a végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert terek a legfontosabbak. Az A pontban nem feltétlenül szükséges megkövetelni, hogy H komplex vektortér legyen, de az alkalmazások során a valós Hilbert tereknek nem sok szerep jut.

Neumann ezután belátta ([6]), hogy az így definiált absztrakt Hilbert tér izometrikusan izomorf a l^2 térrel, így a két formalizmus ekvivalens (de hamar fény derült arra, hogy az absztrakt megfogalmazás könnyebben kezelhető).

Az absztrakt definíciót látva természetesen merül fel a következő kérdés: hogyan tudjuk eldönteni egy Banach térről, hogy a norma skalárszorzatból származtatható-e (azaz, hogy valójában Hilbert térről van-e szó)? Fréchet ([7]) bebizonyította, hogy ez a helyzet, ha a tér bármely 3 dimenziós altere izometrikusan izomorf egy Euklideszi térrel. Neumann és Jordan ([8]) azonban észrevették, hogy ennél több is állítható, és a következő elegáns karakterizációt adták:

1.1. Tétel. *Egy $(X, \|\cdot\|)$ tér normája pontosan akkor származtatható skalárszorzatból, ha teljesül a parallelogramma szabály:*

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

A tétel következménye, hogy a norma skalárszorzatból származtathatóságának szükséges és elegendő feltétele, hogy a tér minden 2 dimenziós altere Euklideszi legyen. Fontos megjegyezni, hogy ha a prallelogramma szabály teljesül, akkor az úgynevezett polarizációs azonossággal meg is kaphatjuk a skalárszorzatot: valós Hilbert tér esetén

$(f, g) = \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2)$,

komplex Hilbert tér esetén pedig

$(f, g) = \frac{1}{4}(\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2) - i\|f+ig\|^2 + i\|f-ig\|^2$.

2. Önadjungált operátorok

Neumann a Hilbert tér absztrakt definíciója után a lineáris operátorok vizsgálatához fordult ([6]). A folytonos lineáris operátorokat jellemzi a következő tétel:

2.1. Tétel. *Egy R lineáris operátor pontosan akkor folytonos, ha*

(i) $\|Rf\| \leq C\|f\|$ (minden $f \in H$-ra), vagy ekvivalensen

(ii) $(Rf, g) \leq C\|f\|\|g\|$ (minden $f, g \in H$-ra.

Ennek a tételnek (és a Riesz-féle reprezentációs tétel egy egyszerű alkalmazásának) a következménye, hogy az egész H-n értelmezett korlátos szeszkvilineáris formák és korlátos lineáris operátorok megfeleltethetők egymásnak.

Azaz, egy R korlátos operátornak megfeleltethetjük a $\phi(f,g) := (Rf,g)$ formát, és fordítva, egy adott ϕ korlátos formához találhatunk olyan R operátort, amelyre $\phi(f,g) := (Rf,g)$. Fontos megjegyezni, hogy (komplex Hilbert tér esetén) egy $\phi(f,g)$ formát a polarizációs azonosság révén egyértelműen meghatározzák a $\phi(f,f)$ értékek. Ennek egyik következménye, hogy ha minden f-re $(Af,f) = 0$, akkor $A = 0$. (Ez valós Hilbert tér esetén nem igaz; gondoljunk a síkon való 90 fokos forgatásra.)

Mi a helyzet azonban a nemkorlátos lineáris operátorokkal? Neumann felismerte, hogy az alkalmazásokban felmerülő differenciál- és integrálopерátorok precíz kezeléséhez a nemkorlátos operátorok absztrakt elméletének megalapozása vezet. A matematikusokat foglalkoztató egyik fő probléma az volt, hogy a korlátos önadjungált operátorokra már bebizonyított spektráltételt milyen formában lehet nemkorlátos operátorokra megfogalmazni.

2.2. Definíció. *Egy (nem feltétlenül korlátos) A linearis operátort szimmetrikusnak hívunk, ha $(Af,g) = (f,Ag)$ teljesül minden $f,g \in \mathrm{Dom}\, A$-ra.*

Korlátos esetben ez éppen az önadjungáltságnak felel meg. Nemkorlátos esetben azonban az már ismert volt ([9]), hogy ez a tulajdonság önmagában még kevés ahhoz, hogy a spektráltétel érvényben maradjon. Neumann számára világos volt, hogy a nemkorlátos operátorok vizsgálatához a linearitáson túl fel kell tenni még valamilyen (a folytonosságnál gyengébb) regularitási tulajdonságot, és a következő definíciókat vezette be ([6], [10]):

2.3. Definíció. *Egy A lineáris operátort zártnak nevezünk, ha a gráfja $\Gamma(A) := \{(x;Ax)\ :\ x \in \mathrm{Dom}\, A\}$ zárt altér $H \times H$-ban.*

Egy A lineáris operátort lezárhatónak hívunk, ha létezik olyan B zárt operátor amelyre $A \subset B$.

Egy sűrűn definiált A lineáris operátor A^* adjungáltját a következőképp értelmezzük: $\mathrm{Dom}\, A^* := \{g \in H :\ \exists g^*$ *amelyre* $(Af,g) = (f,g^*)\}$*, és* $A^*g := g^*$.

Egy A szimmetrikus operátort maximálisnak hívunk, ha A-nak nincs szimmetrikus (valódi) kiterjesztése. (Azaz nincs olyan szimmetrikus B operátor, amelyre $A \subset B$, és $A \neq B$.)

Egy A lineáris operátort önadjungáltnak (Neumann eredeti terminológiájában hipermaximálisnak) nevezünk, ha $A = A^*$.

Minden önadjungált operátor (maximális) szimmetrikus, azonban (a korlátos esettel ellentétben) léteznek olyan szimmetrikus operátorok, amelyek nem önadjungáltak. Neumann bebizonyította, hogy az önadjungált operátorokat éppen az tünteti ki a szimmetrikusok között, hogy érvényben marad rájuk a spektrális felbontási tétel ([6]).

Mielőtt rátérnénk a spektráltétel vizsgálatára, teszünk néhány egyszerű észrevételt. Nem nehéz belátni, hogy a fent definiált A^* adjungált operátor mindig zárt ([10]), előfordulhat azonban, hogy A^* nem sűrűn definiált (sőt, lehet példát adni olyan A-ra, amelynél A^* egyedül a 0 vektoron értelmezett). Ha azonban A zárt, akkor A^* sűrűn definiált, és $A = A^{**}$ ([10]). Továbbá egy A operátor pontosan akkor lezárható, ha A^* sűrűn definiált (és ekkor A^{**} az *A lezártja*) ([10]).

Látható, hogy a szimmetrikus operátor definíciója azzal ekvivalens, hogy $A \subset A^*$ (de A^* általában nem szimmetrikus!), így az előbbiekből következik, hogy egy szimmetrikus operátor mindig lezárható (és könnyű látni, hogy a lezártja is szimmetrikus), tehát egy maximális szimmetrikus operátor szükségképpen zárt. Speciálisan, ha A mindenütt értelmezve van és szimmetrikus, akkor a zárt gráf tételből adódóan azt kapjuk, hogy A szükségképpen korlátos (ezt már Hellinger és Toeplitz [11] korábban bebizonyították). Ez azt mutatja, hogy nincs remény ara, hogy egy nem korlátos szimmetrikus operátort a szimmetrikusság megtartásával az egész térre kiterjesszünk. Lássuk, milyen módon tudta Neumann a nemkorlátos esetben mégis kihasználni a korlátos szimmetrikus operátorokra már ismert spektráltételt.

Neumann először az absztrakt Hilbert tér ortogonális projekcióit jellemezte: egy mindenütt értelmezett korlátos E operátor pontosan akkor egy zárt altérre való ortogonális projekció, ha $E^2 = E$ és $E = E^*$. Továbbá ortogonális projekciók összege, $E_1 + E_2 + \ldots E_p$, pontosan akkor lesz ortogonális projekció, ha minden $E_m E_n = 0$ $(m \neq n)$.

Ezután Neumann definiálta további vizsgálatainak fő eszközét: tetszőleges R zárt, szimmetrikus operátor esetén a

$$V := (R - iI)(R + iI)^{-1}$$

operátort az R *Cayley-transzformáltjának* nevezzük [6]. Megmutatható, hogy V zárt, izometrikus operátor, amely a $\mathrm{Dom}\, V = \mathrm{Ran}\,(R + iI)$ alteret képezi a $\mathrm{Ran}\, V = \mathrm{Ran}\,(R - iI)$ altérre. A $\mathrm{Dom}\, V$ illetve $\mathrm{Ran}\, V$ alterek ortogonális kiegészítőjét *defekt-altereknek*, dimenziójukat (amely akár végtelen is lehet) *defekt indexeknek* nevezik. Neumann megmutatta ([6]), hogy V pontosan akkor maximális szimmetrikus, ha V valamelyik defekt indexe 0, és pontosan akkor önadjungált, ha V mindkét defekt indexe 0, azaz, ha V unitér. Fontos továbbá, hogy R-et visszanyerhetjük V-ből az

$$R = i(I + V)(I - V)^{-1}$$

képlet segítségével. Neumann módszere tehát az volt, hogy kiindulva egy tetszőleges A önadjungált operátorból, annak V Cayley transzformáltja unitér (így korlátos), és V spektrálfelbontásából visszanyerhetjük A sepktrálfelbontását. Precízen megfogalmazva:

2.4. Definíció. *Ortogonális projekcióknak egy $E(\lambda)$, $(\lambda \in \mathbb{R})$ családját az $[a, b]$ intervallumra támaszkodó spektrálmértéknek nevezzük, ha*

(i) $E_\lambda \leq E_\mu$ ha $\lambda \leq \mu$

(ii) ha $\lambda \geq \lambda_0$ és $\lambda \to \lambda_0$, akkor minden $f \in H$-ra $E(\lambda)f \to E(\lambda_0)f$

(iii) ha $\lambda \to a$, akkor $E(\lambda)f \to 0$, illetve ha $\lambda \to b$, akkor $E(\lambda)f \to f$ minden $f \in H$-ra.

2.5. Tétel. *Egy unitér U operátorhoz egyértelműen létezik egy $[0, 1]$-re támaszkodó $E(\lambda)$ spektrálmérték, amelyre*

$$(Uf, g) = \int_0^1 e^{2\pi i\lambda} d(E(\lambda)f, g)$$

teljesül minden $f, g \in H$ esetén.

Ezt a tételt Neumann úgy látta be ([6], Abhang II.), hogy módosította Riesz Frigyes egy a korlátos, szimmetrikus operátorok spektrálfelbontására irányuló bizonyítását. Ezután pedig kimondta a nemkorlátos önadjungált operátorokra vonatkozó spektráltételt [6]:

2.6. Tétel. *Legyen $F(\lambda)$ egy $(-\infty, +\infty)$-re támaszkodó spektrálmérték. Ha az*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(F(\lambda)f, F(\lambda)f)$$

integrál valamely $f \in H$-ra véges, akkor létezik egy olyan $f^* \in H$, amelyre minden $g \in H$-ra

$$(f^*, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(F(\lambda)f, g)$$

teljesül. Az ilyen f-ekre legyen $Rf := f^*$. Az így kapott R operátor önadjungált, és minden önadjungált operáator egyértelműen előállítható ilyen alakban.

Ez a tétel nemcsak matematikai szempontból alapvető fontosságú, hanem a kvantummechanika matematikai modelljének is egyik pillére.

Az önadjungált operátorok kitüntetett szerepét figyelembe véve felmerül a kérdés, hogy egy adott szimmetrikus operátor vajon mindig kiterjeszthető-e önadjungálttá, és ha igen, hogyan jellemezhetők ezek a kiterjesztések. Neumann ezeknél a kérdéseknél is a Cayley-transzformáltat hívta segítségül([6]). Könnyű látni, hogy ha R_1 az R kiterjesztése (ahol mindkét operátorról feltesszük, hogy szimmetrikus és zárt), akkor R_1 Cayley-transzformáltja, V_1, is kiterjesztése V-nek. Fordítva, V minden izometrikus V_1 kiterjesztéséhez létezik R-nek egy olyan R_1 zárt, szimmetrikus kiterjesztése, amelynek Cayley-transzformáltja éppen V_1. Ezek szerint tehát R-nek pontosan akkor létezik önadjungált kiterjesztése, ha V-nek létezik unitér kiterjesztése, és világos, hogy ennek szükséges és elegendő feltétele, hogy a két defekt index megegyezzen egymással. Összefoglalva:

2.7. Tétel. *Az R zárt, szimmetrikus operátornak pontosan akkor létezik önadjungált kiterjesztése, ha defekt-indexei egyenlők, és az önadjungált kiterjesztések egy-egyértelműen megfeleltethetők a V Cayley-transzformált unitér kiterjesztéseinek. R pontosan akkor önadjungált, ha mindkét defekt indexe 0. R pontosan akkor maximális szimmetrikus, ha legalább az egyik defekt indexe 0.*

Az önadjungált kiterjesztések vizsgálatakor Neumann külön figyelmet szentelt egy könnyebben ellenőrizhető, és a gyakorlati alkalmazásokban igen fontos speciális esetnek:

2.8. Definíció. *Egy zárt, szimmetrikus R operátort alulról korlátosnak nevezünk, ha $(Rf, f) \geq C\|f\|^2$ minden $(f \in \mathrm{Dom}\, R)$ esetén. Speciálisan, R-et pozitívnak nevezzük, ha $(Rf, f) \geq 0$.*

Hasonlóan definiáljuk a felülről korlátosság fogalmát, és az alulról ill. felülről korlátos szimmetrikus operátorokat összefoglalva *félig korlátosnak* nevezzük. Neumann megmutatta, hogy minden félig korlátos szimmetrikus R operátornak létezik (szintén félig korlátos) önadjungált kiterjesztése [6]. Azt azonban először Friedrichsnek sikerült megmutatnia [12], hogy olyan önadjungált kiterjesztés is létezik, amelynek korlátja megegyezik az eredeti R operátor korlátjával. (Neumann csak annyit mutatott meg, hogy a kiterjesztés korlátja tetszőlegesen megközelítheti R korlátját.)

2.9. Tétel. *Legyen R olyan zárt, szimmetrikus operátor, amelyre $(Rf, f) \geq C\|f\|^2$ minden $(f \in \mathrm{Dom}\, R)$ esetén. Ekkor létezik R-nek olyan S önadjungált kiterjesztése, amelyre $(Sf, f) \geq C\|f\|^2$ minden $(f \in \mathrm{Dom}\, S)$ esetén.*

Természetesen elég a $C = 1$ esetet vizsgálni. Friedrichs bizonyítása azon alapul, hogy a korlátos lineáris operátorok és szeszkvilineáris formák közötti egy-egyértelmű kapcsolatnak igen speciális esetben nemkorlátos operátorokra is van megfelelője. A részletek pontosítása nélkül említjük meg, hogy az R operátorhoz tartozó (Rf, g) szeszkvilineáris forma *lezárható*, és a lezárt formához *asszociált operátor* önadjungált, és ez szolgáltatja a keresett Friedrichs-féle kiterjesztést (lásd pl. [13]). A félig korlátos szimmetrikus operátorok önadjungált kiterjesztéseinek elméletét később Krein [14] fejlesztette tovább, jellemezve egy pozitív szimmetrikus operátor összes pozitív önadjungált kiterjesztését.

3. Normális operátorok

Az önadjungált operátorokra bizonyított tételek után Neumann a normális operátorok vizsgálatát kezdte meg [15]. Korlátos esetben egy A operátor normalitása egyszerűen definiálható az $AA^* = A^*A$ relációval. Nemkorlátos esetben azonban gondot okoz, hogy az operátorok nem mindenütt értelmezettek, így nem világos, hogy a fenti egyenletet hogyan értsük. Neumann ezért a következő kerülőutat választotta:

Két tetszőleges (nemkorlátos) lineáris operátor helyett tekintsük egy korlátos A és egy nem korlátos R operátor felcserélhetőségének problémáját. Ebben az esetben legalább A mindenütt értelmezett, így a felcserélhetőség egy természetes definíciója, hogy az $ARf = RAf$ egyenlőséget követeljük meg minden $f \in \mathrm{Dom}\, R$-re. (Ekvivalensen: $AR \subset RA$.) Ezután egy tetszőleges R operátorhoz definiálhatjuk azon A korlátos operátorok $\mathcal{M}^1(R)$ halmazát, amelyekre mind A, mind A^* felcserélhetők R-rel. Továbblépve, $\mathcal{M}^2(R)$ jelöli azon korlátos operátorok halmazát, amelyek adjungáltjukkal együtt az összes $\mathcal{M}'(R)$-beli operátorral felcserélhetők. Ezt az eljárást iterálva definiálhatjuk az $\mathcal{M}^n(R) \in B(H)$ halmazokat.

Visszatérve arra az esetre, amikor maga R is korlátos Neumann megvizsgálta, hogy milyen tulajdonságai vannak a fenti $\mathcal{M}^n(R)$ halmazoknak. A pontos jellemzés érdekében a korlátos operátorok $B(H)$ algebráján különböző *operátor topológiákat* vezetett be [15]:

3.1. Definíció. *Az $A_n \subset B(H)$ operátorsorozat tart $A \in B(H)$-hoz*
(i) normában, ha $\|A_n - A\| \to 0$
(ii) erősen, ha $A_n f \to Af$ minden $f \in H$-ra.
(iii) gyengén, ha $(A_n f, g) \to (Af, g)$ minden $f, g \in H$-ra.

Neumann megmutatta, hogy $R \in B(H)$ esetén $\mathcal{M}^n(R)$ gyengén zárt operátoralgebra, valamint $\mathcal{M}^1(R) = \mathcal{M}^3(R) = \ldots$ és $R \in \mathcal{M}^2(R) = \mathcal{M}^4(R) = \ldots$. (A gyengén zárt - vagy, ami ekvivalens, erősen zárt- operátoralgebrákat mai terminológiában Neumann algebráknak nevezzük, és kutatásuk továbbra is az operátorelmélet egyik alapvető ága (lasd [1])). Bebizonyította továbbá, hogy $\mathcal{M}^2(R)$ pontosan akkor kommutatív algebra, ha R normális operátor. Ezek után nemkorlátos R esetén ezt a tulajdonságot használta a normalitás definiálására:

3.2. Definíció. *Egy R lineáris operátort normálisnak nevezünk, ha*
(i) $\mathrm{Dom}\, R \cap \mathrm{Dom}\, R^*$ *sűrű H-ban, és*
(ii) $\mathcal{M}^2(R)$ kommutatív.

Későbbi kutatásai során (lásd [16]) Neumann megmutatta, hogy az első feltétel elhagyható, mert következik a másodikból (sőt, ha feltesszük, hogy R zárt, akkor $\mathrm{Dom}\, R = \mathrm{Dom}\, R^*$ következik). Ennek bizonyítását arra az önmagában is jelentős eredményére alapozta, amely azt állítja, hogy tetszőleges T zárt operátor esetén a T^*T operátor pozitív, önadjungált [10]. Korlátos T esetén ez triviális, az általános esetben azonban első ránézésre már az sem világos, hogy miért lenne T^*T sűrűn definiált. A T^*T operátor önadjungáltságának fontos következménye, hogy minden zárt operátornak létezik *poláris felbontása* [10], azaz olyan $T = WB$ előállítása, ahol B $(= (T^*T)^{1/2})$ pozitív, önadjungált, továbbá W izometrikus transzformáció. (Bizonyos természetes megszorítások mellett ez a felbontás egyértelmű).

A nemkorlátos normális operátorok fenti úton való definiálása után Neumann megmutatta, hogy a spektrális felbontási tétel minden zárt, normális operátorra érvényben marad [15]:

3.3. Tétel. *Legyen R zárt, normális operátor. Ekkor egyértelműen létezik egy olyan $\Delta(z)$ komplex spektrálmérték, amelyre:*

(i) Rf (és R^*f) pontosan akkor van értelmezve, ha $\int\int |z|^2 d(\Delta(z), \Delta(z))$ véges, és ilyen f esetén

(ii) $(Rf, g) = \int\int z d(\Delta(z)f, g)$ és $(R^*f, g) = \int\int \overline{z} d(\Delta(z)f, g)$

4. Függvénykalkulus, spektrálhalmazok

A spektráltétel önadjungált és normális operátorokra történő igazolása után természetes út nyílik operátorok függvényeinek definiálására. Neumann először korlátos önadjungált operátorokra tekintette az

$$(F(A)f, g) = \int F(\lambda) d(E(\lambda)f, g)$$

formulát (lásd [17]), és megmutatta, hogy ha $F(\lambda)$ az A spektrumán korlátos, mérhető függvény, akkor az előbbi képlet egy $F(A)$ korlátos, normális operátort definiál. Megmutatta továbbá, hogy ha F végigfut az összes, a spektrumon korlátos és mérhető függvényen, akkor az $F(A)$ operátorok kiadják az $\mathcal{M}^2(A)$ algebrát, és az $F \mapsto F(A)$ leképezés algebra homomorfizmus. (Megjegyezzük, hogy a funkcionálanalízis jelenleg legelterjedtebb felépítésében a lépések fordított sorrendben követik egymást: a Gelfand-transzformáció segítségével előbb definiálják a fenti algebra morfizmust, majd ebből vezetik le a spektrális felbontási tételt (lásd pl. [18]).) Neumann ezután a következőképp tért át a normális operátorok függvényeire: megmutatta, hogy ha N normális operátor, akkor létezik olyan A önadjungált operátor amelynek N

függvénye, azaz $N = F(A)$ valamely F-re, és ezután a $G(N) := G(F(A))$ definíciót alkalmazta [17].

Igazolható továbbá, hogy az $F(\lambda)$ függvény tulajdonságai szoros kapcsolatban vannak az $F(A)$ operátor tulajdonságaival: ha $|F(\lambda)| \leq K$, akkor $\|F(A)\| \leq K$, ha $F(\lambda)$ valós értékű, akkor $F(A)$ önadjungált, ha $F(\lambda)$ értékei a komlex egységkörön vannak, akkor $F(A)$ unitér.

Későbbi kutatásai során Neumann rátért tetszőleges korlátos operátorok függvényeinek vizsgálatára (lásd [19]). Természetes módon értelmezhetők egy tetszőleges korlátos A operátor $p(A) = p_n A^n + \cdots + p_1 A + p_0 I$ alakú polinomjai. Neumann ezután rátért az olyan $f(\lambda) = \frac{p_1(\lambda)}{p_2(\lambda)}$ alakú racionális törtfüggvényekre, amelyekben a nevező gyökei az A operátor spektrumán kívül esnek. Megmutatta, hogy az $f(A) = p_1(A)(p_2(A))^{-1}$ definíció értelmes, és csak az f függvénytől függ (a p_1 és p_2 polinomok választásától nem). Az olyan f függvényekre amelyek egy az A spektrumát tartalmazó nyílt halmazon holomorfak az $f(A)$ operátort racionális törtfüggvényekkel való approximációval definiálta. Az önadjungált (és normális) operátoroknál látott összefüggések nyomán természetesen adódik a kérdés, hogy az $f(\lambda)$ függvény tulajdonságaiból tudunk-e következtetni az $f(A)$ operátor tulajdonságaira. Neumann bebizonyította, hogy a következő "metrikus" kapcsolat érvényben marad:

4.1. Tétel. *A zárt egységkörlemez minden kontrakció operátornak spektrálhalmaza, azaz:*

Legyen $A \in B(H)$ kontrakció ($\|A\| \leq 1$), és $f(\lambda)$ olyan holomorf függvény egy az egységkörlemezt tatralmazó nyílt tartományon, amelyre $|f(\lambda)| \leq 1$ teljesül a zárt egységkörlemezen. Ekkor $\|f(A)\| \leq 1$, tehát $f(A)$ is kontrakcó.

Neumann továbbá megmutatta, hogy a fenti tulajdonság jellemzi is a kontrakciókat: ha egy korlátos A operátornak az egységkörlemez spektrálhalmaza, akkor A kontrakció.

Neumann fenti eredményeinek sokszínűségét figyelembe véve láthatjuk, hogy annak ellenére, hogy őt elsősorban a fizikai alkalmazások motiválták, az elméleti matematikán belül is olyan alapvető, ma is fejlődő kutatási területeket nyitott meg, mint az operátoralgebrák elmélete, a szimmetrikus operátorok önadjungált kiterjesztéseinek vizsgálata, operátor-osztályok függvénykalkulusának vizsgálata és operátorok spektrálhalmazainak vizsgálata.

Hivatkozások

[1] D. Petz, M.Rédei: John von Neumann and the theory of operator algebras, in *The Neumann Compendum*, 163-185, eds. F. Bródi, T. Vámos, World

Scientific Series in 20th Century Math., vol **1**, World Scientific, Singapore, 1995.

[2] M. Rédei: Why John von Neumann did not like the Hilbert space formalism of quantum mechanics (and what he liked instead), *Stud. Hist. Philos. Sci B Stud. Hist. Philos. Modern Phys.*, **27** (1996), no.4, 493-510, 1997.

[3] Á. Császár, D. Petz.: A panorama of the Hungarian real and functional analysis in the 20th century, *to appear.*

[4] J. von Neumann: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Berlin, Springer, 1932. (Magyar fordítás: *A kvantummechanika matematikai alapjai*, Budapest, 1980.)

[5] D. Hilbert: Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Vierte Mitteilung, *Gött, Nachr.*, 157-227, 1906.

[6] J. von Neumann: Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitischer Funktionaloperatoren, *MAth. Annalen*, **102**, 49-131, 1929.

[7] M. Fréchet: Sur la définition axiomatique d'une classe d'espaces vectoriels distanciés applicables vectoriellement sur l'espace de Hilbert, *Annals. of Math*, (2)36, 705-718, 1935.

[8] P. Jordan, J. von Neumann: On inner products in linear metric spaces, *Annals of Math*, **36**, 719-723, 1935.

[9] T. Carleman: *Sur les équations integrales singuliéres a noyau réel symétrique*, Upsala, 1923.

[10] J. von Neumann: Über adjungierte Funktionaloperatoren, *Annals of Math.*, **33**, 294-310, 1932.

[11] E. Hellinger, O. Toeplitz: Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen, *Math. Annalen*, **69** 289-330, 1910.

[12] K. Friedrichs: Spektraltheorie halbbeschrankter Operatoren, *Math. Annalen*, **109**, 465-487, 1934.

[13] W.G. Faris: *Self-adjoint operators*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 433, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.

[14] M.G. Krein: The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded Hermitian transformations and its applications (in Russian), *Mat Sbornik***20**, 431-495, 1947.

[15] J. von Neumann: Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren, *Math. Annalen*, **102**, 370-427, 1929.

[16] J. von Neumann: On normal operators, *N.A.S. Proc.*, **21**, 366-369, 1935.

[17] J. von Neumann: Uber Funktionen von Funktionaloperatoren, *Annals of Math.*, **32**, 191-226, 1931.

[18] G.K. Pedersen: *Analysis Now*, Graduate Texts in Mathematics, 118, Springer-Verlag, New-york, 1989.

[19] J. von Neumann: Eine Spektraltheorie für allgemeine operatoren eines unitaren Raumes, *Math. Nachrichten*, **4**, 258-281, 1951.