

Matematika A2a – Vektorfüggvények

Erdélyi Márton

www.math.bme.hu/~merdelyi/a2v/

merdelyi@math.bme.hu

H épület 667

1. Lineáris algebra

2. Többváltozós függvények

3. Sorok

Lineáris algebra

A témához ajánlott könyv
Wetl Ferenc: Lineáris Algebra
(a diasornak megfelelő részek)

Lineáris egyenletrendszerek és megoldásaik

Definíció

Legyen m és n pozitív egészek és x_1, x_2, \dots, x_n valós változók.

- ▶ Egy n ismeretlenes **lineáris egyenlet** egy

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

alakú egyenlet, ahol a_1, a_2, \dots, a_n, b valós számok.

- ▶ Egy n ismeretlenes **lineáris egyenletrendszer** egy

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

\vdots

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

alakú egyenletrendszer, ahol a_{jk}, b_k valós számok.

- ▶ Az a_{jk} -k **együtthatók** és a b_j -k a **konstansok**.

Megjegyzés

Valósok helyett ez tetszőleges test lehet (például \mathbb{Q}, \mathbb{C}).

Példa (Néhány lineáris egyenletrendszer)

$$x + y = 3$$

$$x - y = 1$$

$$x + y = 3$$

$$3x - y = 5$$

$$2y = 2$$

$$2x + z = 4$$

$$y + z = 1$$

Definíció

- ▶ A előbbi egyenletrendszer egy **megoldása** egy $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ valós szám n -es (azaz $x_k \in \mathbb{R}$, ha $1 \leq k \leq n$) úgy hogy a változóba ezeket behelyettesítve mindegyik egyenletet teljesül.
- ▶ Az egyenletrendszer **homogén**, ha a konstansok 0-k ($b_j = 0$ minden j -re); különben **inhomogén**.

Tétel

A következők ekvivalensek

1. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ egy megoldás és
2. az egyenletrendszer homogén.

Definíció

Két egyenletrendszer **ekvivalens**, ha a megoldásaik halmaza megegyezik.

Példa

Az előző dián az első két egyenletrendszer ekvivalens, de a harmadik nem.

Tétel (Elemi sorműveletek)

A következő operációk ekvivalens egyenletrendszert eredményeznek

1. Két sor felcserélése,
2. Egy sor megszorítása egy nem nulla számmal és
3. Egy sor többszörösének hozzáadása egy másikhoz.

Példa

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ 2y = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 8.5 \end{cases}$$

Megjegyzés

Érdemes az elemi sorműveleteket használni, és ezt valamilyen követhető formában dokumentálni. Egyszerre akár lehet több lépést is csinálni.

Példa

$$\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \xrightarrow{(1)-2(2)} \begin{cases} x = -11 \\ x + 2y = 8 \end{cases} \xrightarrow{\substack{(2)-(1) \\ (2)/2}} \begin{cases} x = -11 \\ y = 8.5 \end{cases}$$

Vigyázz! (Hol a hiba?)

$$\begin{array}{rcl} 2x + y + z = 4 & \begin{array}{l} (1) - (2) \\ (2) - (3) \end{array} & x - y = 0 \\ x + 2y + z = 4 & \begin{array}{l} (3) - (1) \\ \longrightarrow \end{array} & y - z = 0 \\ x + y + 2z = 4 & & -x + z = 0 \end{array}$$

Ez utóbbi megoldása az $x = y = z = 0$, pedig az eredetinek nem.

Definíció

A definícióban szereplő lineáris egyenletrendszer **mátrixa** (illetve **kibővített mátrixa**)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ill. } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

Megjegyzés

- ▶ A mátrixok később fogjuk pontosan definiálni – egyelőre tekintjük számok táblázatának.
- ▶ Ezzel tömörebb formában lehet számolni.

Példa (Az előző lineáris egyenletrendszerek mátrixokkal)

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & | & 5 \\ 1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-2(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -11 \\ 1 & 2 & | & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -11 \\ 0 & 2 & | & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & -11 \\ 0 & 1 & | & 8.5 \end{pmatrix}$$

Definíció

- ▶ Egy mátrix **sorlépcsős alakú**, ha
 1. a csupa 0 sorok (ha egyáltalán vannak) az utolsók,
 2. bármely két egymást követő nem csupa 0 sor esetén a későbbi legalább eggyel több 0-val kezdődik.
- ▶ Egy sor első nemnulla eleme a **vezérellem**.

Példa (Melyek sorlépcsős alakúak?)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tétel

Bármely mátrix elemi sorműveletekkel sorlépcsős alakra hozható.

Megjegyzés

Néha érdemes lehet eltérni az algoritmikus megoldástól, ha észrevesszük, hogy szebb számokkal számolhatunk.

Gauss-elimináció = egyenletek megoldása ezzel a módszerrel

Példa

$$\begin{array}{r} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 3z = 4 \\ x + 2y + z = 5 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} (2) - 2(1) \\ (3) - (1) \\ (4) - (1) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (2) \leftrightarrow (3) \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} (4) - \frac{1}{2}(2) \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} (4) - \frac{3}{2}(3) \\ \rightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{r} x + y + 2z = 0 \\ 2y + z = 4 \\ -z = 2 \\ 0 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{array}$$

Így az egyetlen megoldás az $(x, y, z) = (1, 3, -2)$.

Definíció

Egy mátrix **redukált sornépcsős alakú**,

1. ha sornépcsős alakú,
2. minden vezérellem 1 (ekkor vezéregyesnek szokták hívni)
3. a vezéregyesek oszlopában minden más elem 0.

Tétel

1. Bármely mátrix elemi sorműveletekkel redukált sornépcsős alakra hozható.
2. A végeredmény a megtett átalakítások módjától függetlenül mindig ugyanaz.

Definíció

Egy A mátrix redukált sornépcsős alakja a fönti átalakítások végeredménye ennek a jele $\text{rref}(A)$.

[redukált sornépcsős alak = reduced row echelon form]

Gauss-elimináció 2.0 = egyenletek megoldása ezen a módon

Példa

$$\begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 3z = 2 \\ x + 3y + 3z = 4 \\ x + 2y + z = 5 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\dots} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}(2)}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(1)-(2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-(3)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/2 & -2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$
$$\begin{array}{l} (1) - \frac{3}{2}(3) \\ (2) - \frac{1}{2}(3) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \\ 0 = 0 \end{array}$$

Így az egyetlen megoldás az $(x, y, z) = (1, 3, -2)$.

Példa

Oszlopról oszlopra haladva keresünk vezérelmet, és ennek segítségével kinullázuk az oszlop vezérelme alatti részét:

1A Ha az első oszlopban van nem 0 elem, azt sorcserével az első sorba visszük.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 4 \\ \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1) \leftrightarrow (2)} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

1B Az első sor többszöröseit levonjuk a többiből úgy, hogy az első oszlop a vezérelme alatt már csupa nulla legyen.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(3) - (1) \\ (2) - 2(1)}}} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

Példa

2A Ezután a második oszlopban keresünk vezérelmet (egy olyan nem nulla elemet, aminek a sorában még nincs vezérelm), ezt sorcserével a legfelső olyan sorba visszük, ahova még kell.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

2B Az 1B lépéshez hasonlóan a második oszlopban lévő vezérelmellel kinullázuk az alatta levő elemeket.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(3) + (2) \\ (4) - 2(2)}}} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

Algoritmus a sorlépcsős alakhoz – általános lépés

Példa

3 Ha nincs vezérelem, akkor továbblépünk a következő oszlopra.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \emptyset & 5 \\ 0 & 0 & \emptyset & -9 \end{pmatrix}$$

k Általában, ha a $k - 1$. oszlopig $l - 1$ vezérelemet találtunk,

A a k . oszlopban keresünk vezérelemet: egy olyan nemnulla elemet, ami nem az első $l - 1$ sorban van. Ezt az l . sorba visszük és

B ezzel kinullázzuk a k . oszlop vezérelem utáni részét (az $l + 1$. sortól kezdve).

A példában $k = 4$ és $l = 3$:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{(4)+9/5 \cdot (3)} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Algoritmus a (redukált) sorlépcsős alakhoz

Példa

- ▶ Ha végigmegyünk az összes oszlopon, sorlépcsős alakot kapunk.
- ▶ A B lépésekben az összes elem nullázást lehet egyszerre végezni, ez mindig ekvivalens átalakítás.

A redukált sorlépcsős alakot úgy érhetjük el, hogy sorok szorzásával a vezérelemeket 1-re alakítjuk, és a segítségükkel kinullázzuk a vezérelemek fölötti részt is. A példában:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{-1} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-(2)} \begin{pmatrix} \underline{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \underline{1} & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 5 & 7 \\ 0 & \underline{1} & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(3)/5} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 5 & 7 \\ 0 & \underline{1} & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} (1) - 7(3) \\ (2) + 4(3) \end{matrix}} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 5 & 0 \\ 0 & \underline{1} & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Néha érdemes nem az algoritmus szerint csinálni

Példa

A módszer szerint:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2/3(1)} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)/3} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3(2)} \begin{pmatrix} 1 & 1/3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-1/3 \cdot (2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ennél gyorsabb és szebb:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(1)-(2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(2)-2(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Példa (Nincs megoldás)

$$\begin{array}{r} x + y = 3 \\ 3x + 4y = 10 \\ 2y = 4 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{(2)-3(1)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} (1) - (2) \\ (3) - 2(2) \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \longrightarrow \begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ 0 = 2 \quad \neq \end{array}$$

Példa (Végtelen sok megoldás)

$$\begin{array}{r} 2x + z = 4 \\ y + z = 1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}(1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\longrightarrow \begin{array}{r} x + \frac{1}{2}z = 2 \\ y + z = 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} x = 2 - \frac{1}{2}z \\ y = 1 - z \\ z = z \end{array}, \text{ minden } z \in \mathbb{R}\text{-re.}$$

A megoldások vektoros alakja
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definíció

Az x_k változó egy lineáris egyenletrendszerben **szabad**, ha a (redukált) sornépcsős alakban a megfelelő oszlopban nincs vezérelem, különben **kötött**.

Tétel

Tekintsünk egy lineáris egyenletrendszert és a kibővített mátrixának (redukált) sornépcsős alakját.

1. Ha van olyan sor, ami a mátrixban csupa nulla, de a kibővített mátrixban a konstans nem 0, akkor nincs megoldás.
2. Különben a szabad változóknak tetszőleges értéket választva pontosan egy megoldás van.

Megjegyzés

- ▶ Tehát a megoldások száma vagy 0, vagy 1, vagy ∞ .
- ▶ Valós számok helyett \mathbb{F} test felett ugyanez a helyzet, ha $|\mathbb{F}| = \infty$,
- ▶ Ha viszont $|\mathbb{F}| = q < \infty$, akkor a megoldások száma vagy 0, vagy q^s , ahol s a szabad változók száma.

Példa (Kis hiba az együtthatókban nagy eltérést adhat)

- ▶
$$\begin{cases} 6.73x - 8.97y = 5.61 \\ 4.79x - 6.39y = 3.99 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1.5 \\ y = 0.5 \end{cases}$$
- ▶
$$\begin{cases} 6.72x - 8.97y = 5.61 \\ 4.79x - 6.39y = 3.99 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2.26 \\ y = -2.32 \end{cases}$$
- ▶
$$\begin{cases} 6.72x - 8.96y = 5.60 \\ 4.80x - 6.40y = 3.99 \end{cases} \implies \text{nincs megoldás.}$$
- ▶
$$\begin{cases} 6.72x - 8.96y = 5.60 \\ 4.80x - 6.40y = 4.00 \end{cases} \implies \text{végtelen sok megoldás van.}$$

Megjegyzés

- ▶ Azaz a Gauss-elimináció numerikusan nem mindig túl jó: ha kicsit változtatunk az együtthatókon / konstansokon, az lényegesen változtathat az eredményeken.
- ▶ Ezen lehet több féle képen segíteni, de erről most nem tanulunk.

Definíció

Legyen V egy halmaz amiben az egyik elem a $\underline{0} \in V$,
 $+$: $V \times V \rightarrow V$ és \cdot : $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ adott műveletek. V **vektortér**
(az előbbi műveletekkel), ha minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ -re és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ -re

1. $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$,
2. $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$,
3. $\underline{0} + \underline{v} = \underline{v}$,
4. van \underline{v}^- , hogy $\underline{v} + \underline{v}^- = \underline{0}$,
5. $(\alpha + \beta) \cdot \underline{v} = \alpha \cdot \underline{v} + \beta \cdot \underline{v}$,
6. $\alpha \cdot (\underline{u} + \underline{v}) = \alpha \cdot \underline{u} + \alpha \cdot \underline{v}$,
7. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \underline{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \underline{v})$ és
8. $1 \cdot \underline{v} = \underline{v}$.

Példa

- ▶ Síkbeli és térbeli vektorok a szokásos $+$ és \cdot művelettel
- ▶ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. De pl $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ nem vektortér!
- ▶ $\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ függvények}\}$ a szokásos műveletekkel
- ▶ $(\{\text{lehetséges bevásárlások a piacon}\}, +, \cdot)$ „majdnem” vektortér

Tétel

1. A definícióban szereplő \underline{v}^- egyértelmű, 3. $0 \cdot \underline{u} = \underline{0}$ és
2. Ha $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u}$, akkor $\underline{v} = \underline{0}$, 4. $\underline{v}^- = (-1)\underline{v} =: -\underline{v}$

Definíció

$U \subset V$ egy **altér** (jele $U \leq V$), ha U nem üres, zárt az összeadásra és a szorzásra (azaz minden $\underline{u}, \underline{v} \in U$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ -re $\underline{u} + \underline{v}, \alpha \underline{u} \in U$).

Példa

$\{0\}$ és $V \subset V$ a triviális alterek.

Az $\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ függvények}\}$ vektortérben

- ▶ altér $\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ folytonos függvények}\}$
- ▶ altér $\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ páros függvények}\}$,
- ▶ de nem altér $\{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ pozitív függvények}\}$.

Tétel

Ha $U_1, U_2 \leq V$, akkor $U_1 \cap U_2 \leq V$.

Megjegyzés

A vektortér definíciójában \mathbb{R} helyett bármilyen testet vehetünk (pl \mathbb{Q} és \mathbb{C} -t, vagy az 5-ös maradékosztályokat – de \mathbb{Z} , vagy a 6-os maradékosztályok nem jók).

Definíció

- ▶ \mathbb{R}^m a valós szám- m -esek halmaza vektortér a természetes (elemenkénti) összeadással és a (valós számmal) szorzással.
- ▶ $\mathbb{R}^{m \times n}$ a valós $m \times n$ -es (m sor és n oszlop) számtáblázatok halmaza vektortér a természetes (elemenkénti) összeadással és a (valós számmal) szorzással.

Megjegyzés

\mathbb{R}^m elemeit általában oszlopvektor formájában írjuk, vagy helytakarékoság miatt a következő módon:

$$(1, 2, 3)^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Definíció

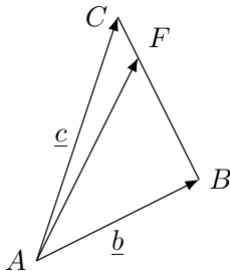
$\underline{w} \in V$ a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ vektorok **lineáris kombinációja**, ha $\underline{w} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$ valamely $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ valós számokra.

Példa

Legyen F az ABC háromszög BC oldalát $x : y$ arányban felosztó pont. Ekkor

$$\overrightarrow{AF} = \frac{y}{x+y} \overrightarrow{AB} + \frac{x}{x+y} \overrightarrow{AC}.$$

Tehát \overrightarrow{AF} előáll \overrightarrow{AB} és \overrightarrow{AC} lineáris kombinációjaként.



Definíció

- ▶ A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ vektorok által feszített altér (Spanned subspace) a lineáris kombinációk halmaza:
$$\text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = \{\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \mid \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}.$$
- ▶ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ generátorrendszer, ha
$$\text{Span}(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n) = V.$$

Tétel

A feszített altér tényleg altér.

Példa

\mathbb{R}^2 és \mathbb{R}^3 alterei.

Megjegyzés

- ▶ Legyenek $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n, \underline{b} \in \mathbb{R}^m$ vektorok, ekkor az $x_1 \cdot \underline{a}_1 + x_2 \cdot \underline{a}_2 + \dots + x_n \cdot \underline{a}_n = \underline{b}$ lineáris egyenletrendszernek pontosan akkor van megoldása, ha $\underline{b} \in \text{Span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n)$.
- ▶ Továbbá az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ pontosan akkor generátorrendszer, ha a (redukált) sorlépcsős alak minden sorában van vezérellem.

Definíció

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ vektorok **lineárisan függetlenek**, ha
 $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0} \implies \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.
Különben a $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorok **lineárisan összefüggők**.

Vigyázz!

Az, hogy $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ lin. független, nem azt jelenti, hogy \underline{v}_1 lin. független, és ugyanígy \underline{v}_2 és \underline{v}_3 is, hanem hogy a három vektorból álló rendszer lineárisan független.

Megjegyzés

- ▶ A $\underline{0}$ -t tartalmazó vektorrendszerek lineárisan összefüggők.
- ▶ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$ vektorok pontosan akkor lineárisan függetlenek, ha az $x_1 \cdot \underline{a}_1 + x_2 \cdot \underline{a}_2 + \dots + x_n \cdot \underline{a}_n = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszernek csak a csupa 0 a megoldása, azaz ha nincs szabad változó (minden oszlopban van vezérellem).

Példa

\mathbb{R}^2 és \mathbb{R}^3 lineárisan független vektorrendszerei.

Tétel

A következők ekvivalensek:

1. $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ lineárisan független
2. vagy $n = 1$ és $\underline{v}_1 \neq \underline{0}$, vagy $n > 1$ és semelyik sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként.

Megjegyzés

Így ha egy vektorrendszer lineárisan összefüggő, akkor vagy legalább 2 elemű, vagy csak a 0 vektorból áll.

Tétel

Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ lineárisan függetlenek, és \underline{w} előáll a \underline{v}_i -k lineáris kombinációjaként, akkor ez az előállítás egyértelmű.

Vigyázz!

Ezt máskor nem igaz, úgyhogy ne használd!

Definíció

A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ vektorrendszer rangja a maximális lineárisan független részrendszer elemszáma.

Megjegyzés

Ha $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$, akkor ennek a vektorrendszernek a rangja az egyenletrendszer (redukált) sorlépcsős alakjában a vezérelemek száma.

Tétel

Legyen $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ egy vektorrendszer.

1. Ha elhagyunk, egy olyan vektort, ami előáll a többi lineáris kombinációjaként, akkor a rang nem változik.
2. Ha elhagyunk, egy olyan vektort, ami nem áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor a rang eggyel csökken.
3. Ha hozzáveszünk egy olyan vektort, ami előáll a többi lineáris kombinációjaként, akkor a rang nem változik.
4. Ha hozzáveszünk egy olyan vektort, ami nem áll elő a többi lineáris kombinációjaként, akkor a rang eggyel nő.

Definíció

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ **bázis**, ha lineárisan független generátorrendszer.

Példa

- ▶ $1 \in \mathbb{R}$ bázis,
- ▶ $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k} \in \mathbb{R}^3$ egy bázis,
- ▶ $1, x, x^2, x^3$ bázis a legfeljebb harmadfokú polinomok terében.

Tétel

Ha V vektortér, akkor minden bázis ugyanannyi vektort tartalmaz.

Tétel

Ha a bázisok elemszáma véges, akkor egy bázist kapunk

- ▶ bármely lineárisan független rendszerhez új független vektorok hozzáadásával és
- ▶ bármely generátorrendszerből függő vektorok elhagyásával.

Definíció

V **dimenziója** egy bázisának elemszáma. Jele $\dim(V)$.
Egy U altér dimenziója az altér bázisának elemszáma.

Megjegyzés

- ▶ Vannak végtelen dimenziós vektorterek, például a (végtelen) sorozatok vektortere – ezekkel most nem fogunk foglalkozni.
- ▶ $\dim(\{0\}) = 0$.

Tétel

Ha U altér V -ben, akkor

- ▶ $\dim(U) \leq \dim(V)$ és
- ▶ $\dim(U) = \dim(V) \iff U = V$.

Példa

\mathbb{R}^4 -ben elfér két sík úgy, hogy csak egy pontban metszik egymást:
 $\{x = y = 0\}$ és $\{z = w = 0\}$.

Tétel

1. Egy n ismeretlenes homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza altér \mathbb{R}^n -ben.
2. Egy n ismeretlenes inhomogén lineáris egyenletrendszer
 - a. vagy nem megoldható,
 - b. vagy a megoldásai $\underline{x}_p + \underline{x}_h$ alakúak, ahol \underline{x}_p egy partikuláris megoldás és \underline{x}_h a homogén egyenletrendszer megoldása.

Megjegyzés

Adott $\underline{v} \in V$ és $U \leq V$ -re a $\underline{v} + U = \{\underline{v} + \underline{u} \mid \underline{u} \in U\}$ alakú halmazokat affin altereknek nevezik. Egy affin altér többféle módon leírható $\underline{v} + U$ alakban, \underline{v} változhat, de U mindig ugyanaz.

Példa

- ▶ $\{z = 2x, w = x + y + z\} \leq \mathbb{R}^4$ egy bázisa.
- ▶ $\{z = 1 + 2x, w = x + y + z - 3\} \leq \mathbb{R}^4$, mint affin altér.

Tétel

Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ bázis, akkor minden $\underline{v} \in V$ vektor egyértelműen állítható elő $\alpha_1 \underline{v}_1 + \alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$ lineáris kombinációként ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$).

Definíció

A \underline{v} vektor **koordinátái** a $B = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$ bázisban $[\underline{v}]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ a fenti α -kra.

Példa

- ▶ Ha $B = (\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}) \in \mathbb{R}^3$ a koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorok, O az origó és P a hagyományos koordinátarendszerben (x, y, z) koordinátájú pont, akkor B egy bázis, és itt $[\overrightarrow{OP}]_B = (x, y, z)^T$.
- ▶ Legyen $C = ((1, 1, 1)^T, (1, 2, 3)^T, (1, 4, 9)^T) \in \mathbb{R}^3$ (ez tényleg bázis) és $\underline{v} = (0, 2, 3)^T$. Mi $[\underline{v}]_C$?

Tétel

$[\underline{v} + \underline{w}]_B = [\underline{v}]_B + [\underline{w}]_B$ és $[\lambda \underline{v}]_B = \lambda [\underline{v}]_B$.

Definíció

- ▶ Egy m sort és n oszlopot ($n, m \in \mathbb{N}$) tartalmazó valós számtáblázatot $m \times n$ -es (valós) **mátrix**-nak nevezünk.
- ▶ Az $m \times n$ valós mátrixok halmazát $\mathbb{R}^{m \times n}$ -el jelöljük.

Példa

Egy n ismeretlenes m egyenletből álló lineáris egyenletrendszer mátrixa egy mátrix $\mathbb{R}^{m \times n}$ -ben.

Megjegyzés

- ▶ Egy mátrixra nézhetünk mint oszlop- (vagy sor-) vektoraira is.
- ▶ Egy mátrixot általában nagy betűvel jelölünk, az elemeit a megfelelő kis betűvel és indexekkel: ha A egy mátrix, akkor a_{11} a bal felső eleme. A legtöbb esetben az aláhúzott kis betű az oszlopvektort jelöli: \underline{a}_1 az A mátrix első oszlopvektora.

Definíció

Legyen R egy halmaz és $+, \cdot$ műveletek (azaz $+, \cdot : R \times R \rightarrow R$ függvények). $(R, +, \cdot)$ egy **gyűrű**, ha minden $a, b, c \in R$ -re

	összeadás	szorzás
asszociatív	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(ab)c = a(bc)$
kommutatív	$a + b = b + a$	
egység	$\exists 0 \in R : 0 + a = a$	$\exists 1 \in R : 1 \cdot a = a = a \cdot 1$
inverz	$\exists(-a) : a + (-a) = 0$	
disztributív:	$a(b + c) = ab + ac$ és	$(a + b)c = ac + bc.$

Megjegyzés

- ▶ Angolul ring – ezért szokás R -rel jelölni.
- ▶ Minden test gyűrű. Ott a szorzás is kommutatív és minden nemnulla elemnek van multiplikatív inverze.
- ▶ \mathbb{Z} és a hatos maradékosztályok halmaza is gyűrű.
- ▶ Mátrixoka tetszőleges gyűrű felett lehet értelmezni, az $m \times n$ -es mátrixok halmaza $R^{m \times n}$.

Definíció

Legyen $\lambda \in R$ és $A, B \in R^{m \times n}$.

- ▶ $A + B \in R^{m \times n}$ az a mátrix, amelyre $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ és
- ▶ $\lambda A \in R^{m \times n}$ az a mátrix, amelyre $(\lambda A)_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ minden $1 \leq i \leq m$ és $1 \leq j \leq n$ -re.

Megjegyzés

Így $(\mathbb{R}^{m \times n}, +, \cdot)$ egy mn dimenziós vektortér. Egy bázisa az E_{ij} mátrixok – amiknek az i . sorának j . eleme 1, a többi 0.

Definíció

- ▶ Egy $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix **transzponáltja** az az $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mátrix, amelyre $(A^T)_{ij} = a_{ji}$ minden i, j -re.
- ▶ Egy $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mátrix **adjungáltja** az az $A^* \in \mathbb{C}^{n \times m}$ mátrix, amelyre $(A^*)_{ij} = \bar{a}_{ji}$ minden i, j -re.

Megjegyzés (Ez összhangban van az eddigiekkel:)

A \underline{v}^T oszlopvektor a mátrix transzponáltja is az \underline{v} sorvektornak.

Definíció

Legyen $A \in R^{m \times n}$ és $\underline{x} \in R^n = R^{n \times 1}$ egy oszlopvektor.
A szorzatuk a következő $R^m = R^{m \times 1}$ -beli oszlopvektor:

$$A\underline{x} = x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + \cdots + x_n\underline{a}_n.$$

Példa

- ▶ Ha $(A|\underline{b})$ egy lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixa, akkor írható mátrix alakban is: $A\underline{x} = \underline{b}$. Itt $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ az ismeretlenekből álló oszlopvektor. Ekkor az egyenletek a \mathbb{R}^m -beli vektorok sorainak felelnek meg.
- ▶ Legyen $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n)$ egy bázis \mathbb{R}^n -ben és jelöljük B -vel az oszlopvektorokból alkotott mátrixot $\mathbb{R}^{n \times n}$ -ben. Ekkor $[\underline{v}]_B = \underline{x} \iff \underline{v} = B\underline{x}$.

Tétel

Minden $A \in R^{m \times n}$ -re, $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$ -re és $\lambda \in R$ -re

1. $A(\underline{x} + \underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y}$
2. $\lambda(A\underline{x}) = A(\lambda\underline{x})$.

Definíció

Ha $A \in R^{\ell \times m}$ és $B \in R^{m \times n}$, akkor $AB \in R^{\ell \times n}$ az a mátrix, amelyre

$$(AB)_{ij} = \sum_{t=1}^m a_{it} b_{tj}.$$

Megjegyzés

- ▶ Ez összhangban van az eddigiekkel: $A\underline{b}$ megegyezik az $A \in R^{m \times n}$ mátrix és a $\underline{b} \in R^{n \times 1}$ mátrix-szorzatával.
- ▶ Fontos, hogy a mátrixok összeillő méretűek legyenek:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{tj} \end{pmatrix} = c_{ij}$$

A diagram illustrating the compatibility of matrix dimensions for multiplication. Matrix A is labeled with dimensions $\ell \times m$. Matrix B is labeled with dimensions $m' \times n$. A horizontal arrow labeled "feltéve hogy $m = m'$ " indicates that the number of columns of A must equal the number of rows of B . A vertical arrow points from the result c_{ij} to the product AB , which is labeled with dimensions $\ell \times n$.

Megjegyzés

- ▶ A szorzás nem kommutatív:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sőt az is előfordulhat hogy AB értelmes, de BA nem.

- ▶ A szorzat akkor is lehet 0, ha tagok nem 0-k:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tétel

Legyenek A, B és C mátrixok és λ skalár ($\in R$).

Ha a következő kifejezések értelmesek, akkor megegyeznek:

1. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$,
2. $A(B + C) = AB + AC$ és $(A + B)C = AC + BC$,
3. $(AB)C = A(BC)$.
4. $(\lambda \cdot A)^T = \lambda \cdot A^T$ illetve $(\lambda \cdot A)^* = \lambda \cdot A^*$,
5. $(A + B)^T = A^T + B^T$ illetve $(A + B)^* = A^* + B^*$ és
6. $(AB)^T = B^T A^T$ és $(AB)^* = B^* A^*$.

Definíció

- ▶ $A \in R^{m \times n}$ **négyzetes** mátrix, ha $n = m$,
- ▶ az $m \times n$ -es **nulla mátrix** az a $0 = 0_{m \times n} \in R^{m \times n}$, amelynek minden eleme $0 \in R$ és
- ▶ az $n \times n$ -es **egységmátrix** az az $I_n \in R^{n \times n}$, amelyre

$$(I_n)_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = k \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}.$$

Megjegyzés

- ▶ Ha $A \in R^{m \times n}$, akkor $A = A + 0$ és $(-1)A + A = 0$,
- ▶ ha $A \in R^{m \times n}$, akkor $A = I_m A = A I_n$,
- ▶ így az előbbi dián lévő tétel első három állítása miatt $(R^{n \times n}, +, \cdot)$ egy gyűrű,
- ▶ de $(R^{m \times n}, +, \cdot)$ nem, ha $m \neq n$ (a szorzás nem is művelet).
- ▶ Négyzetes mátrixokat lehet hatványozni: $A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ ($n \in \mathbb{N}$ darab tényezővel). Ekkor $A^{m+n} = A^m A^n$ és $(A^m)^n = A^{mn}$, de $(AB)^n \neq A^n B^n$.

Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

- ▶ Az A mátrix **oszloptere** $\mathcal{O}(A) = \text{Span}(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n) \leq \mathbb{R}^m$, azaz az oszlopvektorai által feszített altér.
- ▶ Hasonlóan A **sortere** $\mathcal{S}(A) \leq \mathbb{R}^n$ a sorvektorok által feszített altér.

Tétel

1. $\mathcal{O}(A)$ egy bázisa A azon oszlopvektorai, amik A sornlépcsős alakjában a vezérelemekhez tartoznak.
2. $\mathcal{S}(A)$ egy bázisa A (redukált) sornlépcsős alakjában azon sorvektorok, amikben van vezérelem.

Megjegyzés

Az elemi sorműveletek nem változtatnak a sortéren, de az oszloptéren igen!

Definíció

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ rangja $r(A) = \dim(\mathcal{O}(A))$.

Példa

- ▶ Határozzuk meg $r(A)$ -t, $\mathcal{O}(A)$ és $\mathcal{S}(A)$ egy bázisát. Mik az oszlopvektorok koordinátái az előbbi bázisban?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ Mi a következő mátrixok rangja?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & n^2 \end{pmatrix}$$

Tétel

$r(A) = \dim(\mathcal{O}(A)) = \dim(\mathcal{S}(A)) = \#(\text{vezérelmek rref}(A) - \text{ban})$
 $= \#(\text{nemnulla sorok rref}(A) - \text{ban}).$

Megjegyzés

Ha $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, akkor $r(A) \leq \min(m, n)$.

Tétel

Let $A, B \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$ and $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Then

1. $r(A^T) = r(A)$,
2. $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$ és
3. $r(AC) \leq \min(r(A), r(C))$.

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$ és tekintsük az $(A|\underline{b})$ kibővített mátrixú lineáris egyenletrendszerét.

1. Az egyenletrendszer megoldható $\iff r(A) = r(A|\underline{b})$ és
2. pontosan egy megoldás van $\iff r(A) = r(A|\underline{b}) = n$.

Definíció

Legyen R egy gyűrű és $a \in r$. Ekkor

- ▶ $b \in R$ az a elem **bal inverze**, ha $ba = 1$.
- ▶ $c \in R$ az a elem **jobb inverze**, ha $ac = 1$.
- ▶ $a \in R$ **invertálható**, ha van bal és jobb inverze is.

Példa

- ▶ $2 \in \mathbb{R}$ inverze $1/2$, de $2 \in \mathbb{Z}$ nem invertálható.
- ▶ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ -nak nincs semelyik oldali inverze.
- ▶ Van olyan gyűrű és olyan elem, aminek csak egyik oldali inverze van. Sőt az is előfordulhat, hogy több különböző is.

Tétel

Ha $a \in R$ invertálható, akkor a(z egyetlen) bal inverze megegyezik a(z egyetlen) jobb inverzével (és akkor ezt hívjuk a inverzének).

Definíció

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ inverzét A^{-1} -el jelöljük (ha egyáltalán létezik).

Tétel

1. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pontosan akkor invertálható, ha $r(A) = n$ és
2. ekkor az inverzét megkaphatjuk Gauss-eliminációval: az $(A|I_n)$ kibővített mátrixra az eredmény $(I_n|A^{-1})$.

Megjegyzés

- ▶ Ha A nem négyzetes, akkor nincs inverze.
- ▶ Ha A négyzetes és van féloldali inverze, akkor invertálható is.

Példa

Számoljuk ki az alábbi mátrixok inverzét (ha létezik)!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Példa (Ez mátrixegyenlet-megoldásra is használható:)

Mi az $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixegyenlet megoldása?

Tétel

Legyen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertálhatók és $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.
Ekkor

1. $(A^{-1})^{-1} = A$,
2. $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1} = (1/\lambda) A^{-1}$,
3. AB is invertálható és $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$,
speciálisan $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, ha $k \in \mathbb{N}$ és
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, $(C^*)^{-1} = (C^{-1})^*$

Definíció

Legyen $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n)$ és $C = (\underline{c}_1, \underline{c}_2, \dots, \underline{c}_n)$ az \mathbb{R}^n két bázisa, és jelölje B és C a bázisvektorokból álló mátrixot is. Ekkor a $T_{C \leftarrow B} = C^{-1}B$ mátrixot **transzformációmátrixnak** nevezzük. (Ez létezik, hiszen B bázis, tehát $r(B) = \dim(\mathcal{C}(B)) = n$).

Tétel

1. Tetszőleges $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $[\underline{v}]_C = T_{C \leftarrow B}[\underline{v}]_B$.
2. Ha E a hagyományos bázis, akkor $T_{E \leftarrow B} = B$.
3. $T_{B \leftarrow C} = T_{C \leftarrow B}^{-1}$, speciálisan $T_{B \leftarrow E} = B^{-1}$.
4. Ha D is egy bázis, akkor $T_{D \leftarrow B} = T_{D \leftarrow C} T_{C \leftarrow B}$.

Példa

Mi $P(0,2,3)$ képe az $x=y=z$ tengely körüli 180° -os forgatás után?

A megoldás lépései:

1. Keresni egy kényelmes B bázist és kiszámolni a $T_{E \leftarrow B}$ és $T_{B \leftarrow E}$ mátrixokat.
2. Kiszámolni $[\underline{p}]_B = T_{B \leftarrow E} \underline{p}$ -t ($\underline{p} = (0, 2, 3)^T$).
3. Meghatározni a képet ebben a bázisban: $[\underline{q}]_B$.
4. Kiszámolni $\underline{q} = T_{E \leftarrow B}[\underline{q}]_B$ -t.

Példa

1. A $B = (\underline{t} = (1, 1, 1)^T, \underline{u} = (0, 1, -1)^T, \underline{v} = (1, 0, -1)^T)$ bázis „kényelmes”, hiszen \underline{t} párhuzamos a tengellyel, \underline{u} és \underline{v} pedig merőlegesek rá.

$$T_{E \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, T_{B \leftarrow E} = T_{E \leftarrow B}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \begin{array}{l} (2)-(1) \\ (3)-(1) \end{array} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \begin{array}{l} (3)+(2) \\ \implies \end{array} \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & & 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & -(3)/3 \end{array}$$

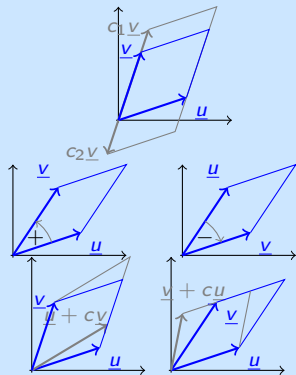
$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \begin{array}{l} (1)-(3) \\ (2)+(3) \end{array} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}$$

2. $[\underline{p}]_B = T_{B \leftarrow E} \underline{p} = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)^T$.
3. $[\underline{q}]_B = \left(\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)^T$, hiszen a forgatásnál $\underline{t} \mapsto \underline{t}$, $\underline{u} \mapsto -\underline{u}$ és $\underline{v} \mapsto -\underline{v}$.
4. $\underline{q} = T_{E \leftarrow B} [\underline{q}]_B = \left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)^T$, így a kép $Q\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Emlékeztető (Parallelogrammák előjeles területe)

Legyen $t(\underline{u}, \underline{v})$ az $\underline{u}, \underline{v}$ oldalú parallelogramma területe. Ekkor

1. $t(c\underline{u}, \underline{v}) = ct(\underline{u}, \underline{v}) = t(\underline{u}, c\underline{v})$
2. $t(\underline{u}, \underline{v}) = -t(\underline{v}, \underline{u})$
3. $t(\underline{u}, \underline{v}) = t(\underline{u} + c\underline{v}, \underline{v}) = t(\underline{u}, \underline{v} + c\underline{u})$
4. $t(\underline{e}_1, \underline{e}_2) = 1$.



Példa

Mi a $(2, 5), (-3, 1)$ oldalú parallelogramma területe?

Tétel

Minden $n \in \mathbb{N}$ -re egyetlen olyan $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény létezik, amelyre ha B az a mátrix, amit A -ból

1. az egyik sor c -szerezésével kapunk, akkor $\det(B) = c \det(A)$,
2. két sor felcserélésével kapunk, akkor $\det(B) = -\det(A)$,
3. az egyik sorához egy másik sor többszörösének hozzáadásával kapunk, akkor $\det(B) = \det(A)$,
4. $\det(I_n) = 1$.

Megjegyzés

A sorok helyett lehetet(ne) oszlopműveleteket is csinálni.

Definíció

A fenti függvény a **determináns**, egy A mátrix determinánsát $\det(A)$ -val vagy $|A|$ -val jelöljük.

Vigyázz!

Csak négyzetes mátrixnak van determinánusa.

Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- ▶ A **főátlója** az a_{ij} elemek,
- ▶ A **diagonális**, ha $a_{ij} = 0$ minden $i \neq j$ -re,
- ▶ A **felső háromszögmátrix**, ha $a_{ij} = 0$ minden $i > j$ esetén és
- ▶ A **alsó háromszögmátrix**, ha $a_{ij} = 0$ minden $i < j$ esetén.

Tétel

Ha A diagonális, vagy háromszögmátrix (alsó vagy felső), akkor $\det(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$ – azaz a főátlóbeli elemek szorzata.

Példa

Mennyi $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ and $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$?

Megjegyzés

- ▶ A determináns kiszámolható Gauss-eliminációval (sorok szorzása nélkül). Ha a kapott sornépcsős mátrix B és k sorcserére volt szükség, akkor $\det(A) = (-1)^k \det(B)$.
- ▶ Sorokat is lehet szorozni, de akkor ezt érdemes könyvelni.
- ▶ Ez bizonyítja, hogy ha létezik a determináns, akkor egyértelmű.

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A következők ekvivalensek:

1. $\det(A) \neq 0$,
2. A invertálható,
3. $r(A) = n$,
4. $\text{rref}(A) = I_n$,
5. az $A\underline{x} = \underline{0}$ egyenletnek csak az $\underline{x} = 0$ a megoldása és
6. az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletnek minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ -re van megoldása.

Tétel

Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ és $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, akkor

1. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$,
2. $\det(AB) = \det(A) \det(B)$,
3. $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$, ha A invertálható
4. $\det(A^T) = \det(A)$.

Vigyázz!

- ▶ $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$!

Sőt $\det(A + B)$ nem is fejezhető ki $\det(A)$ és $\det(B)$ segítségével:

Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ekkor $\det(A) = \det(B) = \det(A') = \det(B') = \det(A' + B') = 0$,
de $\det(A + B) = 1$.

- ▶ $\det(C^*) = \overline{\det(C)}$, ha $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

Definíció

Legyen π az $S = \{1, 2, \dots, n\}$ halmaz egy permutációja (azaz egy $\pi : S \rightarrow S$ bijektív függvény). $\pi(1)\pi(2)\dots\pi(n)$ -vel jelöljük.

- ▶ Az $(i, j) \in S^2$ pár **inverzióban van** π -ben, ha $i < j$ és $\pi(i) > \pi(j)$.
- ▶ π **inverziószáma** az inverzióban lévő párok száma. A jele $i(\pi)$.
- ▶ π **páros** (ill. **páratlan**) ha $i(\pi)$ páros (ill. páratlan).

Példa

- ▶ Mennyi $i(3241)$?
- ▶ Mi az inverzióban lévő párok maximális száma $\{1, 2, \dots, 6\}$ permutációinál?
- ▶ Keresz olyan π permutációját $\{1, 2, \dots, 6\}$ -nak, hogy $i(\pi) = 7$!

Definíció

▶ $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **permutációmátrix**, ha minden sorában és minden oszlopában egyetlen 1-es van, a többi elem 0.

▶ Ezek bijekcióban vannak az $\{1, 2, \dots, n\}$ permutációival:

π -nek az a mátrix felel meg, amelyre $p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } \pi(i) = j \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$.

Példa

▶ Mi a (345126)-nek megfelelő permutációmátrix?

▶ Mi a $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ -nak megfelelő permutáció?

Tétel

1. Permutációmátrixok szorzata permutációmátrix.

2. Legyen P a π -nek megfelelő mátrix. Ekkor $\det(P) = (-1)^{i(\pi)}$.

Tétel

Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, akkor $\det(A) = \sum_{\pi} (-1)^{i(\pi)} a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)}$,
ahol a szumma $S = \{1, 2, \dots, n\}$ permutációin összegez.

Megjegyzés

- ▶ Ha $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, akkor $\det(A) \in \mathbb{Z}$ – ez eddig nem látszott.
- ▶ Ezt $R^{n \times n}$ -re is meg lehet csinálni, ha R kommutatív gyűrű (azaz a szorzás kommutatív), nem csak valósakra.

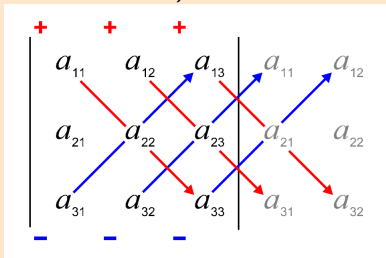
Példa

Mennyi	a	b	0	\dots	0	?
	0	a	b	\dots	0	
	0	0	a	\dots	0	
	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	
	b	0	0	\dots	a	

Megjegyzés

- ▶ 2×2 -es determinánsok: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- ▶ Sarrus-szabály (= 3×3 -as determinánsok):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$



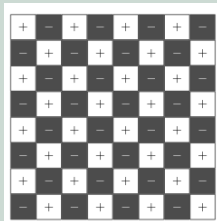
$$(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$$

Példa

Mennyi $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ és $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$?

Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $1 \leq i, j \leq n$. Az (i, j) -hez tartozó **előjeles aldetermináns** az $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A')$, ahol A' az az $(n-1) \times (n-1)$ -es mátrix, amit úgy kapunk A -ból, hogy elhagyjuk az i . sort és a j . oszlopot.



Tétel

1. Ha az A mátrix i . sorában az egyetlen nemnulla elem a_{ij} , akkor $\det(A) = a_{ij}A_{ij}$.
2. Ugyanígy, ha a j . oszlopban az egyetlen nemnulla elem a_{ij} , akkor $\det(A) = a_{ij}A_{ij}$.

Példa

$$\text{Mennyi } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 8 & 4 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 8 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} ?$$

Tétel (Determinánsok kifejtése)

Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ és $1 \leq i \leq n$, akkor

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{jk} A_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}.$$

Példa

► Az első sor szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = \\ (2 - 28) - 0 + 2(7 - 6) = -24.$$

► Számoljuk ki újra $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & 0 & 0 & \dots & a \end{vmatrix}$ -t kifejtéssel!

Példa

Érdeemes a tanult technikákat kombinálni:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -7 & -4 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -10 & 8 & 3 \\ -11 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -98.$$

Tétel (Rang számolása determinánsokkal)

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Ekkor $r(A)$ a legnagyobb olyan r szám, amire A -nak van $r \times r$ -es, nemnulla determinánsú részmatrixa.

(A részmatrix egy olyan matrix, amit az eredetiből néhány sor és oszlop elhagyásával kapunk)

Példa

Mennyi az $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ matrix rangja?

Tétel (Inverz számolása determinánsokkal)

Ha A invertálható, akkor $(A^{-1})_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det(A)}$, ahol A_{ji} a nemrég definiált előjeles aldetermináns.

Megjegyzés

Speciálisan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, ha $ad - bc \neq 0$.

Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, amelynek az oszlopvektorai $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n$ és legyen $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$. Legyen $A_{j,\underline{b}} = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_{j-1}, \underline{b}, \underline{a}_{j+1}, \dots, \underline{a}_n)$ – a mátrix, amit úgy kapunk A -ból, hogy a j . oszlopot kicseréljük \underline{b} -re.

Tétel (Cramer-szabály)

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertálható $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$. Az $A\underline{x} = \underline{b}$ mátrixegyenlet egyetlen megoldásának koordinátái $x_j = \frac{\det(A_{j,\underline{b}})}{\det(A)}$.

Definíció

Legyen V és W (valós) vektorterek. Egy $A : V \rightarrow W$ függvény (vagy más szavakkal leképezés, operátor) **lineáris**, ha

1. $A(\underline{u} + \underline{v}) = A(\underline{u}) + A(\underline{v})$ minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ -re és
2. $A(\lambda \underline{v}) = \lambda A(\underline{v})$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ -re és $\underline{v} \in V$ -re.

Ha $V = W$, akkor A -t lineáris **transzformációnak** nevezzük.

Megjegyzés

$$A(\underline{0}) = A(0 \cdot \underline{0}) = 0 \cdot A(\underline{0}) = \underline{0}.$$

Példa

- ▶ \mathbb{R}^3 origót fixen hagyó tükrözései és forgatásai lineárisok.
- ▶ Az $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ vetítése lineáris.
- ▶ A deriválás, mint $\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ differenciálható függvények}\} \rightarrow \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ függvények}\}$ operátor lineáris.

Tétel

Tetszőleges $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_n \in \mathbb{R}^m$ vektorokhoz egyetlen olyan $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés létezik, amelyre $A(\underline{e}_j) = \underline{a}_j$ minden $j = 1, 2, \dots, n$ -re (itt $\underline{e}_k \in \mathbb{R}^n$ a sztenderd bázisvektorok).

Definíció

Az $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés **(sztenderd) mátrixa** az az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, aminek j . oszlopa $A(\underline{e}_j)$. Ekkor $A(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$.

Megjegyzés

Így az $m \times n$ mátrixok természetes módon megfelelnek az $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezéseknek, tehát írhatunk $A = A$ -t.

Példa

Mi a következő lineáris leképezések mátrixa?

- ▶ a z-tengely körüli $+\alpha$ szögű forgatás a térben,
- ▶ a tér vetítése a síkra: $(x, y, z) \mapsto (x, y)$ és

Mi a $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ -nak megfelelő lineáris transzformáció a síkon?

Definíció

Legyen $A : V \rightarrow W$ lineáris leképzés.

- ▶ A **képtere** ([Image]) az $\text{Im}(A) = \{A(\underline{v}) \mid \underline{v} \in V\} \subset W$ halmaz.
- ▶ A **magtere** ([Kernel]) a $\text{Ker}(A) = \{\underline{v} \in V \mid A(\underline{v}) = \underline{0}\} \subset V$.
- ▶ A **rangja** a mátrixának rangja.

Megjegyzés (A mátrixok nyelvén:)

- ▶ $\text{Ker}(\underline{x} \mapsto A\underline{x}) = \{\underline{x} \mid A\underline{x} = \underline{0}\}$ – a homogén egyenletrendszer megoldáshalmaza,
- ▶ $\text{Im}(\underline{x} \mapsto A\underline{x}) = \mathcal{O}(A)$ – A oszloptere.

Tétel

1. $\text{Im}(A) \leq W$ és $\text{Ker}(A) \leq V$ (alterek).
2. A szürjektív $\iff \text{Im}(A) = W$.
3. A injektív $\iff \text{Ker}(A) = \{\underline{0}\}$.

Példa

Mi az $x + 2y + 3z = 0$ síkra merőleges vetítés képtere és magtere?

Tétel (Dimenzió-tétel)

Ha $A : V \rightarrow W$ lineáris leképezés, akkor
 $\dim(V) = \dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Im}(A))$.

Megjegyzés

Legyen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ és $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$. Ekkor $\text{Ker}(A)$ egy bázisa a homogén lineáris egyenletrendszer általános megoldásában a szabad változókhoz tartozó oszlopvektorok.

Példa

Legyen $A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ -hoz tartozó

lineáris leképezés. Keressünk egy-egy bázist a képterében és a magterében!

Tétel

Legyen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció. Ekkor a következők ekvivalensek:

1. A -nak van inverze (tehát egy olyan B függvény, amire $A \circ B = B \circ A = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$),
2. A mátrixa invertálható,
3. $\text{Ker}(A) = 0$ és
4. $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$.

Megjegyzés (Végtelen dimenzióban ez nem igaz)

Legyen V a végtelen sorozatok vektortere (a szokásos $+$, \cdot -al),

A a jobbra tolás $((a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, \dots))$ és

B a balra tolás $((a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (a_2, a_3, a_4, \dots))$.

Ekkor $A : V \rightarrow V$ és $B : V \rightarrow V$ lineáris, A injektív, de nem szürjektív, B szürjektív, de nem injektív és $B \circ A = \text{id} \neq A \circ B$, hiszen az utóbbi „elfelejti” az első tagot.

Definíció

Legyen $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n)$ a V vektortér egy bázisa, $A : V \rightarrow V$ egy lineáris transzformáció. A **mátrixa a B bázisban** az az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix, aminek a j . oszlopa a $[A(\underline{b}_j)]_B$ koordinátavektor.

Megjegyzés

- ▶ Ez kompatibilis a sztenderd mátrixszal, hiszen A sztenderd mátrixa $[A]_E$ (ahol $E = (\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_n)$ a sztenderd bázis).
- ▶ Ha $B : V \rightarrow W$ lineáris leképezés, akkor is csinálhatunk hasonlót, csak külön kell egy-egy bázist rögzíteni V -ben és W -ben.

Tétel

1. Ekkor minden $\underline{x} \in V$ -re $[A(\underline{x})]_B = [A]_B[\underline{x}]_B$.
2. Ha C egy másik bázis, $T_{B \leftarrow C}$ és $T_{C \leftarrow B}$ a megfelelő transzformációmátrixok, akkor $[A]_C = T_{C \leftarrow B}[A]_B T_{B \leftarrow C}$.

Példa (Egy már ismerős példa)

Kérdés: Mi az $x = y = z$ tengely körüli 180° -os forgatás mátrixa?
Mi a $P(0, 2, 3)$ pont képe a forgatás után?

Volt: $B = (\underline{t} = (1, 1, 1)^T, \underline{u} = (0, 1, -1)^T, \underline{v} = (1, 0, -1)^T)$ bázis „kényelmes”, és itt a transzformációmátrixok:

$$T_{E \leftarrow B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, T_{B \leftarrow E} = T_{E \leftarrow B}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

A forgatás mátrixa a B bázisban $[A]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, hiszen \underline{t} párhuzamos a tengellyel, \underline{u} és \underline{v} pedig merőlegesek rá. Így

$$A = [A]_E = T_{E \leftarrow B} [A]_B T_{B \leftarrow E} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Speciálisan a $\underline{p} = (0, 2, 3)^T$ képe helyvektora

$\underline{q} = A\underline{p} = \frac{1}{3}(10, 4, 3)^T$, tehát P képe a forgatás után $Q(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3})$.

Megjegyzés

Az eddigiek alapján meg tudjuk határozni egy geometriai transzformáció mátrixát. De hogyan lehet eldönteni egy mátrixról, hogy milyen jellegű transzformációhoz tartozik?

Példa

Milyen leképezés (sztenderd) mátrixa $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$?

Megjegyzés

Legyen A a sík, vagy a tér egy lineáris transzformációja (vagy a mátrixa).

- ▶ A vetítés $\iff A^2 = A$,
- ▶ A tükrözés $\iff A^2 = I$ és $A^T = A$,
- ▶ A egybevágóság $\iff A^T A = I$ és
- ▶ A irányítástartó egybevágóság $\iff A^T A = I$ és $\det(A) > 0$.

Sajátvektorok és sajátértékek

Definíció

Legyen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció, vagy a mátrixa.

- ▶ $\underline{v} \neq \underline{0}$ a A **sajátvektora**, ha van olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$.
- ▶ $\lambda \in \mathbb{R}$ az A egy **sajátértéke**, ha van hozzá tartozó saját vektor (tehát $\underline{v} \neq \underline{0}$, amelyre $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$).
- ▶ A λ sajátértékhez tartozó **saját altér** a $\{\underline{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\underline{v} = \lambda\underline{v}\}$ (tehát a λ -hoz tartozó sajátvektorok és a $\underline{0}$).

Tétel

A saját alterek tényleg alterek.

Példa

Mik az alábbi mátrixok sajátvektorai, sajátértékei és saját alterei?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definíció

Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix **karakterisztikus polinomja**

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

Tétel

λ sajátértéke A -nak $\iff k_A(\lambda) = 0$.

Megjegyzés (Sajátértékek és sajátvektorok meghatározása)

- ▶ A karakterisztikus polinom gyökei a sajátértékek.
- ▶ Minden λ sajátértékre a hozzá tartozó sajátvektorok az $(A - \lambda I_n)\underline{v} = \underline{0}$ egyenlet $\underline{0}$ -tól különböző megoldásai. (ilyenek vannak, hiszen $\det(A - \lambda I) = 0$)
- ▶ A invertálható $\iff 0$ nem sajátérték.

Példa

Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sajátértékeit és sajátvektorait!

Tétel (A sík és a tér lineáris transzformációi)

1. Legyen $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris. Ekkor ha $k_A(\lambda)$ -nak
 - a) egy kétszeres gyöke van, akkor ha A vagy a sík nyújtása (a saját altér 2Ds), vagy egy nyírás és nyújtás kompozíciója (a saját altér 1Ds),
 - b) két különböző valós gyöke van, akkor A a sík nyújtása („a két független sajátvektor irányában a két sajátértékkel”),
 - c) két különböző nem valós gyöke van (λ és $\bar{\lambda}$), akkor A a sík forgatványújtása: a forgatás szöge $\pm \arg(\lambda)$, a nyújtás mértéke $|\lambda|$.
2. Legyen $B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris. Ekkor ha $k_B(\lambda)$ -nak
 - a) van többszörös gyöke, akkor B nyújtások és nyírások kompozíciója,
 - b) három különböző valós gyöke van, akkor a tér nyújtása („a három független sajátvektor irányában a három sajátértékkel”),
 - c) ha van nem valós gyöke, akkor egy forgatványújtás (mint 2Dben) és a tengely (saját altér) irányában még egy nyújtás kompozíciója.

Megjegyzés (A sík és a tér transzformációi)

A hagyományos (affin) transzformációk megkaphatók, ha még egy eltolást is megengedünk.

Tétel

Ha $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok, B invertálható és $A' = B^{-1}AB$, akkor

1. $k_A(\lambda) = k_{A'}(\lambda)$
2. \underline{v} az A' mátrix λ -hoz tartozó sajátvektora $\iff B\underline{v}$ az A mátrix λ -hoz tartozó sajátvektora

Definíció

Az $A, A' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok **hasonlók** ($A \sim A'$), ha van olyan invertálható B mátrix, amelyre $A' = B^{-1}AB$. Ekkor a megfelelő lineáris transzformációkra $A' = [A]_B$ - tehát ez egy bázisváltás.

Tétel

Legyen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformáció.

1. Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok, akkor lineárisan függetlenek.
2. Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k$ egy λ sajátértékhez tartozó lineárisan független saját vektorok, akkor k legfeljebb akkora, ahányszoros gyöke λ a karakterisztikus polinomnak.

Tétel

Ha $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineáris transzformációhoz, van \mathbb{R}^n -nek A sajátvektoraiból $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n)$ álló bázisa, akkor $[A]_B = B^{-1}AB$ diagonális és a főátló a \underline{b}_j -khez tartozó λ_j sajátértékeket tartalmazza.

Példa (Gyors mátrixhatványozás)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^n &= \left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right)^n = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 3^n - 2^n \\ 2^{n+1} - 2 \cdot 3^n & 2 \cdot 3^n - 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tétel (Cayley-Hamilton tétel)

Ha $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, akkor $k_A(A) = 0$ – tehát a mátrixot beírva a karakterisztikus polinomjába (a konstans helyére I_n -t írva) a 0 mátrixot kapjuk.

Példa

Bizonyos mátrixok kisebb fokú polinomba behelyettesítve is a 0-t adják:

- ▶ Az I_n mátrix az $x - 1$ -be helyettesítve 0-t ad.
- ▶ A tükrözésekre $A^2 = I$, tehát az $x^2 - 1$ -be helyettesítve 0-t adnak,
- ▶ A vetítésekre $A^2 = A$, tehát az $x^2 - x$ -be helyettesítve 0-t adnak.

Megjegyzés (Mátrix exponenciális)

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots + \frac{A^k}{k!} + \dots,$$

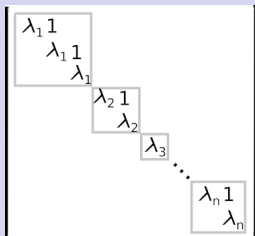
a soroknál látni fogjuk, hogy miért.

Tétel (Jordan-féle normálalak)

1. \mathbb{C} felett:

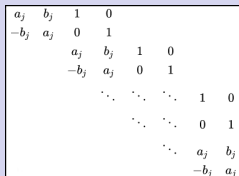
Minden $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix hasonló egy olyan alakúhoz, mint az ábrán.

Az üres helyeken 0-k vannak, a $\lambda_i \in \mathbb{C}$ -k a sajátértékek, de nem feltétlenül különböznek. A bekeretezett részeket Jordan-blokkoknak nevezik.



2. \mathbb{R} felett:

Minden $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix hasonló egy olyan alakúhoz, mint a fenti ábrán, csak a nem valós sajátértékekhez tartozó Jordan blokkok olyan alakúak, mint itt.



Példa (Hány tengelyt nyírunk)

Ha $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ olyan, hogy $k_A(\lambda) = (1 - \lambda)^3$, akkor az alábbiak közül pontosan az egyikhez hasonló:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definíció

Legyen V egy valós vektortér. A $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **skaláris szorzat** (vagy **belső szorzat**), ha minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ -re és $\lambda \in \mathbb{R}$ -re

1. $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{v}, \underline{u} \rangle$,
2. $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \geq 0$, és $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle = 0 \iff \underline{u} = \underline{0}$,
3. $\langle \lambda \underline{u}, \underline{v} \rangle = \lambda \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ és
4. $\langle \underline{u}, \underline{v} + \underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle$.

Példa

- ▶ \mathbb{R}^n egy skaláris szorzata $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u}^T \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$, a sztenderd skaláris szorzat.
- ▶ $\{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ folytonos}\}$ vektortér egy skaláris szorzata

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Definíció

Legyen V egy komplex vektortér. A $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ függvény skaláris szorzat (vagy belső szorzat), ha minden $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ -re és $\lambda \in \mathbb{C}$ -re

1. $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \overline{\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle}$,
2. $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \geq 0$, és $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle = 0 \iff \underline{u} = \underline{0}$,
3. $\langle \lambda \underline{u}, \underline{v} \rangle = \lambda \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, \lambda \underline{v} \rangle$ és
4. $\langle \underline{u}, \underline{v} + \underline{w} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{u}, \underline{w} \rangle$.

Megjegyzés

- ▶ A másodiknak csak az első miatt van értelme: $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle = \overline{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle}$, tehát $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle$ valós, így értelmes a $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \geq 0$ kifejezés.
- ▶ A harmadik helyett általában a következő szokott lenni:
3*. $\langle \lambda \underline{u}, \underline{v} \rangle = \lambda \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, \bar{\lambda} \underline{v} \rangle$,
de nekünk most a fenti kényelmesebb.

Példa

\mathbb{C}^n egy skaláris szorzata $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u}^* \underline{v} = \overline{u_1} v_1 + \overline{u_2} v_2 + \cdots + \overline{u_n} v_n$.

Megjegyzés

- ▶ Ha a sztenderd bázis helyett egy $B = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \dots, \underline{b}_n)$ bázisban csináljuk ugyanezt, tehát $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_B = [\underline{u}]_B^T [\underline{v}]_B$, akkor a hagyományos koordinátákkal (és így $\underline{u} = B[\underline{u}]_B$ -vel)

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_B = (B[\underline{u}]_E)^T (B[\underline{v}]_E)^T = [\underline{u}]_E^T (B^T B) [\underline{v}]_E.$$

(Illetve komplex esetben $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_B = [\underline{u}]_E^* (B^* B) [\underline{v}]_E$).

- ▶ $W = B^T B$ -t, vagy $W = B^* B$ -t súlymátrixnak nevezik [weight]. Ekkor $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle_B = \underline{u}^T W \underline{v}$ (illetve $\underline{u}^* W \underline{v}$).
- ▶ Ebből látszik, hogy minden vektortéren végtelen sok skaláris szorzat van.
- ▶ Hasonlóan az $\{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ folytonos} \}$ függvények vektortéren gyakran egy súlyfüggvénnyel definiálják a skaláris szorzatot: $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, w \geq 0$ -ra

$$\langle f, g \rangle_w = \int_a^b f(x)g(x)w(x) dx.$$

Megjegyzés

A vektorterekben nincs értelme a hosszaknak és szögnek. Egy skaláris szorzat segítségével viszont lehet hosszt (azaz normát) és szöget definiálni:

- ▶ $\|\underline{u}\| = \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle}$ és
- ▶ $(\underline{u}, \underline{v})\sphericalangle = \arccos\left(\frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|}\right),$

ha az utóbbi egyáltalán értelmes. (Mi lehet a baj?)

Példa

- ▶ Mi az $(1, 2, 3, 4)^T$ és $(1, 0, 0, -1)^T \in \mathbb{R}^4$ vektorok hossza és szöge (a sztenderd skaláris szorzatra nézve)?
- ▶ Mi az $f(x) = x$ és $g(x) = x^2$, mint $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények hossza és szöge az előbbi skaláris szorzatra nézve?

Tétel (Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenség)

Ha $\langle \cdot, \cdot \rangle$ egy skaláris szorzat a V vektortéren, akkor minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ -re

$$|\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle|^2 \leq \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \cdot \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$

Definíció

$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ **norma**, ha minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ -re és λ skalárra

1. $\|\underline{u}\| \geq 0$ és $\|\underline{u}\| = 0 \iff \underline{u} = \underline{0}$,
2. $\|\lambda\underline{u}\| = |\lambda| \|\underline{u}\|$ és
3. $\|\underline{u} + \underline{v}\| \leq \|\underline{u}\| + \|\underline{v}\|$.

Tétel

Ha $\langle \cdot, \cdot \rangle$ egy skaláris szorzat V -n, akkor $\|\underline{u}\| = \sqrt{\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle}$ egy norma.

Példa

- ▶ Ha $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u}^T \underline{v}$, akkor a megfelelő norma a sztenderd norma.
- ▶ Ha $\langle f, g \rangle = \int f(x)g(x)$, akkor $\|f\| = \sqrt{\int f^2(x) dx}$ az L^2 -norma.

Megjegyzés

Ha V véges dimenziós, akkor minden norma már ismert skaláris szorzatból jön. Ha végtelen dimenziós, akkor van több is (pl L^0 , L^1 és L^∞ normák).

Definíció

Legyen V egy vektortér $\langle \cdot, \cdot \rangle$ egy skaláris szorzat. Ekkor

- ▶ $\underline{u} \perp \underline{v}$ (\underline{u} és \underline{v} **merőlegesek**), ha $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$
- ▶ $U \leq V$ altér **merőleges kiegészítője**

$$U^\perp = \{\underline{v} \in V \mid \forall \underline{u} \in U : \underline{u} \perp \underline{v}\}.$$

Példa

Mi az $x + 2y + 3z = 0$ sík merőleges kiegészítője? És a $\{\underline{0}\}$, \mathbb{R}^3 altereké? (\mathbb{R}^3 -ben a sztenderd skaláris szorzatra nézve).

Megjegyzés

Az $A\underline{x} = \underline{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza éppen a $\mathcal{S}(A)^\perp$ - a sortér merőleges kiegészítője.

Tétel

Ha $U \leq V$ altér, akkor

1. U^\perp is altér,
2. ha V véges dimenziós, akkor $\dim(U) + \dim(U^\perp) = \dim(V)$.

Definíció

Legyen V vektortér, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skaláris szorzat és $\|\cdot\|$ a megfelelő norma.

- ▶ A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ vektorrendszer **ortogonális**, ha minden $i \neq j$ -re $\underline{v}_i \perp \underline{v}_j$.
- ▶ A $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ vektorrendszer **ortonormált**, ha ortogonális és minden i -re $\|\underline{v}_i\| = 1$.

Példa

Melyik vektorrendszer ortogonális és ortonormált a síkon?

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right)$$

Megjegyzés

- ▶ Legyen $\underline{e} \in V$ egységvektor (azaz $\|\underline{e}\| = 1$). Ekkor \underline{v} merőleges vetülete \underline{e} -re $\langle \underline{v}, \underline{e} \rangle \underline{e}$.
- ▶ Vetítésekkel és skalárral szorzásokkal tetszőleges vektorrendszerből kaphatunk egy ortonormált rendszert. Ezt Gram-Schmidt-ortogonalizációnak hívják.

Tétel

Legyen $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ nemnulla vektorok.

1. Ha $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vektorrendszer ortogonális, akkor lineárisan független is.
2. Ha $B = (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n)$ ortonormált bázis, akkor minden $\underline{v} \in V$ vektorra

$$\underline{v} = \langle \underline{v}, \underline{v}_1 \rangle \underline{v}_1 + \langle \underline{v}, \underline{v}_2 \rangle \underline{v}_2 + \dots + \langle \underline{v}, \underline{v}_n \rangle \underline{v}_n,$$

azaz $[\underline{v}]_B = (\langle \underline{v}, \underline{v}_1 \rangle, \langle \underline{v}, \underline{v}_2 \rangle, \dots, \langle \underline{v}, \underline{v}_n \rangle)^T$.

Példa

Mik a $\underline{v} = (3, 4, 5)^T$ vektor koordinátái a

$$B = \left(\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

bázisban?

Vigyázz!

Ez csak ortonormált rendszerekre igaz!

Definíció

Legyen V valós (vagy komplex) vektortér. Az $A : V \rightarrow V$ lineáris leképezés **önadjungált**, ha minden $\underline{u}, \underline{v} \in V$ -re $\langle A(\underline{u}), \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, A(\underline{v}) \rangle$.

Megjegyzés

- ▶ $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ önadjungált \iff a mátrixa szimmetrikus,
- ▶ $C : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ önadjungált \iff a mátrixa önadjungált, azaz $C^* = C$.

Itt a vektorterek a sztenderd skaláris szorzattal értendők.

Tétel (Főtengelytétel)

Legyen $A : V \rightarrow V$ önadjungált lineáris transzformáció. Ekkor

1. A minden sajátértéke valós,
2. ha $\underline{u}, \underline{v}$ különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok, akkor $\underline{u} \perp \underline{v}$ és
3. V -nek van A sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa.

Megjegyzés

Ha $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix önadjungált, akkor minden $\underline{u} \in \mathbb{C}^n$ vektorra $\underline{u}^* C \underline{u} \in \mathbb{R}$ – tehát egy valós szám.

Definíció

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix

- ▶ **pozitív definit**, ha minden $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ nemnulla vektorra $\underline{u}^T A \underline{u} > 0$,
- ▶ **negatív definit**, ha minden $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ nemnulla vektorra $\underline{u}^T A \underline{u} < 0$,
- ▶ **pozitív szemidefinit**, ha minden $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $\underline{u}^T A \underline{u} \geq 0$,
- ▶ **negatív szemidefinit**, ha minden $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ vektorra $\underline{u}^T A \underline{u} \leq 0$,
- ▶ és **indefinit**, ha $\underline{u}^T A \underline{u}$ pozitív és negatív értéket is felvesz.

Ugyanezek a fogalmak értelmesek $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált mátrixra csak $\underline{u}^* C \underline{u}$ -t kell nézni.

Megjegyzés

$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u}^T A \underline{v}$ egy skaláris szorzat $\iff A$ pozitív definit.

Példa

Mit tudunk elmondani az alábbi mátrixok definittségéről?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Definíció

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix és $1 \leq k \leq n$. Az A mátrix k . **vezető főminor**a az első k sora és k oszlopa.

Tétel

Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrix. A következők ekvivalensek:

1. A pozitív definit,
2. A összes sajátértéke pozitív és
3. A minden vezető főminorának pozitív a determinánsa.

Megjegyzés

Az utolsót a legegyszerűbb ellenőrizni és erre szükségünk is lesz a többváltozós függvények szélsőérték helykeresésénél.

Megjegyzés

- ▶ A akkor negatív definit, ha $-A$ pozitív definit, azaz ha a főminorok determinánsának előjele váltakozva $-, +, -, +, \dots$
- ▶ Különben, ha a főminorok determinánsa nem 0, akkor a mátrix indefinit.
- ▶ Ha van 0 is, akkor kicsit nehezebb eldönteni: érdemes a 0 sajátértékhez tartozó sajátvektorokat (ha vannak) a bázisban „hátrateni”, és a „maradékról” eldönteni, hogy definit-e.

Vigyázz!

Így A nem akkor negatív definit, ha a vezető főminorok determinánsa negatív.

Példa

Mi mondható el a következő mátrixok definitiségéről?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Többváltozós függvények

Emlékeztető

Legyen X halmaz és legyen $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ egy adott függvény. Ekkor X **metrikus tér** (a d távolságfüggvénnyel), ha minden $x, y, z \in X$ -re

1. $d(x, y) = d(y, x)$, (szimmetria)
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$ és (elválasztás)
3. $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$. (háromszög-egyenlőtlenség)

Legyen $x_0 \in X$, $r > 0$. Ekkor

- ▶ Az x_0 pont r sugarú **teljes környezet**
 $B(x, r) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r\}$,
- ▶ Az x_0 pont r sugarú **(pontozott) környezet**
 $B^0(x, r) = \{x \in X \mid 0 < d(x, x_0) < r\}$.

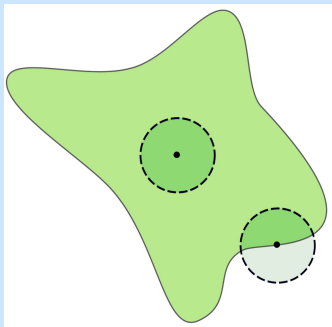
Példa

\mathbb{R}^n -en (azaz az $\{x = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ halmazon) tetszőleges norma megad egy metrikát: $d(x, y) = \|x - y\|$. Néhány „furcsa” példa $d_1(x, y) = \max(|x_i - y_i|)$, vagy $d_2(x, y) = \sum |x_i - y_i|$.

Emlékeztető

Legyen X metrikus tér, $x_0 \in X$ és $H \subseteq X$. Ekkor

- ▶ x_0 **belső pontja** H -nak, ha van olyan teljes környezete, ami része H -nak ($\exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq H$),
- ▶ x_0 **külső pontja** H -nak, ha van olyan teljes környezete, ami része \overline{H} -nak ($\exists r > 0 : B(x_0, r) \subseteq \overline{H}$),
- ▶ x_0 **határpontja** H -nak, ha minden teljes környezete metszi H -t és \overline{H} -t is
($\forall r > 0 : B(x_0, r) \cap H \neq \emptyset$,
 $B(x_0, r) \cap \overline{H} \neq \emptyset$),
- ▶ H **nyílt**, ha minden pontja belső pont
($\forall x \in H \exists r : B(x, r) \subseteq H$) és
- ▶ H **zárt**, ha \overline{H} nyílt.
- ▶ x_0 **torlódási pontja** H -nak, ha minden környezete metszi H -t
($\forall r > 0 : B^0(x_0, r) \cap H \neq \emptyset$).



Definíció (Sorozat határértéke általánosan)

Az $(a_n) \in X$ sorozat **határértéke** $a \in X$, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : a_n \in B(a, \varepsilon).$$

Megjegyzés

A határérték fogalmához igazából nem is kell a távolságfüggvény, csak a nyílt halmazok ismerete (topológia): $B(a, \varepsilon)$ -t le lehet cserélni bármely a -t tartalmazó nyílt halmazra:

$$\forall U \text{ nyílt, } a \in U \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : a_n \in U.$$

Tétel

A következők ekvivalensek:

1. H zárt
2. minden $(a_n) \in H$, konvergens sorozat határértéke H -beli.

(Tehát nem lehet H -ból „kikonvergálni”.)

Tétel

1. \mathbb{R}^2 -n a d , d_1 és d_2 távolságfüggvényekre ugyanazok a nyílt és zárt halmazok.
2. \mathbb{R}^n -en bármely normából jövő távolságfüggvényre ugyanazok a nyílt és a zárt halmazok.

Megjegyzés

- ▶ Tehát ha kényelmesebb, használhatjuk d helyett d_1 -t, vagy d_2 -t.
- ▶ \mathbb{R}^2 -n a $d_3(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = y \\ 1, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$ távolságra minden halmaz nyílt (és zárt is). Így csak azoknak a sorozatoknak van határértéke, amik egy idő után konstansok.
- ▶ Végtelen dimenzióban vannak olyan normák, amik mást adnak.

Definíció

- ▶ f egy m változós valós értékű függvény, ha $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ leképezés valamely $X \subseteq \mathbb{R}^m$ -re.
- ▶ f értelmezési tartománya $\text{Dom}(f) = X$.
- ▶ f értékkészlete $\text{Ran}(f) = \{f(x) | x \in X\} \subset \mathbb{R}$.
- ▶ f grafikonja \mathbb{R}^{m+1} következő részhalmaza $\{(x, f(x)) | x \in X\}$.
- ▶ f (kétváltozós) függvény c magasságú szintvonala az $\{x | f(x) = c\}$ halmaz – azaz f grafikonját elmetsszük az $x_{m+1} = c$ síkkal és levetítjük az $x_{m+1} = 0$ -ra.

Példa

Mik az alábbi függvények grafikonjai és szintvonalai?

- ▶ $f(x, y) = x + y$,
- ▶ $g(x, y) = xy$ és
- ▶ $h(x, y) = x^2 + y^2$.

A szintvonalak nem is mindig „vonalak”.

Definíció

Legyen f többváltozós függvény, $a \in \text{Dom}(f)$ és $v \in \mathbb{R}^m$ olyan, hogy $\{a - tv \mid 0 < t < t_0\} \subseteq \text{Dom}(f)$ valamely $t_0 > 0$ -ra. Ekkor az f függvény v **irányú határértéke** az a pontban $b \in \mathbb{R}$, ha a $g(t) = f(a - tv)$ egyváltozós függvényre $\lim_{t \rightarrow 0+0} g(t) = b$.

Példa

Mi az $f(x, y) = y/x$ határértéke $(0, 0)$ -ban a különböző irányokból?

Definíció

Legyen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ m változós függvény és $a \in \text{Dom}(f)$ torlódási pont. Ekkor

- ▶ f **határértéke** a -ban $b \in \mathbb{R}$ (jele $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$), ha
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B^0(a, \delta) \cap \text{Dom}(f) : |f(x) - b| < \varepsilon,$$
- ▶ f **határértéke** a -ban ∞ (jele $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$), ha
$$\forall k \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in B^0(a, \delta) \cap \text{Dom}(f) : f(x) > k,$$
- ▶ hasonlóan a határérték lehet $-\infty$ is.

Példa

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x > y}} \frac{1}{x-y} = - \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x < y}} \frac{1}{x-y} = \infty.$$

Tétel

Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, akkor minden létező iránymenti határértéke is b .

Vigyázz! (Fordítva nem igaz)

Például az $f(x, y) = \begin{cases} y^2/x, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ függvénynek nincs határértéke $(0, 0)$ -ban, pedig minden iránymenti határértéke 0.

Példa

Az alábbiak közül melyik határérték létezik?

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$$

Definíció

- ▶ f egy n változós vektor értékű függvény, ha $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ leképezés valamely $X \subseteq \mathbb{R}^n$ -re.
- ▶ f **i . koordinátafüggvénye** az $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)_i$ valós értékű függvény.

Példa

- ▶ A lineáris leképezések többváltozós függvények is.
- ▶ Mi az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos t, \sin t)$ függvény?

Definíció

Legyen $a \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ torlódási pont és $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény. Ekkor f **határértéke** a -ban $b \in \mathbb{R}^m$ (jele $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$), ha

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in B^0(a, \delta) : d(f(x), b) < \varepsilon.$$

Vigyázz! (\mathbb{R}^m -ben nincs $<$ reláció)

Vektorértékű függvényeknél (ilyen módon) nincs értelme annak, hogy a határérték végtelen. És a monotonitásnak se.

Tétel

Legyen $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ n változós függvény és koordinátafüggvényei az f_i -k. A következők ekvivalensek:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ létezik
2. $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x)$ létezik minden $1 \leq i \leq m$ -re,

és ekkor a határértéket koordinátánként lehet számolni
(azaz $\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)_i = \lim_{x \rightarrow a} f_i(x)$).

Definíció

Legyen f többváltozós valós vagy vektorértékű függvény és $a \in X$.

- ▶ f **folytonos** a -ban, ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ és
- ▶ f **folytonos**, ha minden $a \in \text{Dom}(f)$ -ben folytonos.

Tétel

1. A konstans függvények és az identitásfüggvények folytonosak.
2. f folytonos \iff a koordinátafüggvényei is folytonosak.

Definíció

Legyenek f, g többváltozós függvények, $c \in \mathbb{R}$.

- ▶ $c \cdot f : x \mapsto c \cdot f(x)$ -re $\text{Dom}(c \cdot f) = \text{Dom}(f)$,
- ▶ $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ -re $\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$,
- ▶ ha f és g valós értékű, akkor
 $f \cdot g : x \mapsto f(x)g(x)$ -re $\text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ és
 $1/f : x \mapsto 1/f(x)$ -re $\text{Dom}(1/f) = \text{Dom}(f) - \{x | f(x) = 0\}$.

Tétel

Ha $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = p$, $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = q$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor

1. $\lim_{x \rightarrow a} cf(x) = cp$, $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = p + q$ és
2. ha f és g valós értékűek, akkor $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = pq$, és $q \neq 0$ esetén $\lim_{x \rightarrow a} (f/g)(x) = p/q$.

Megjegyzés

Így folytonos függvények többszöröse és összege, valós értékű esetben a szorzata és hányadosa is folytonos.

Definíció

Legyenek f, g többváltozós függvények.

- ▶ $f \circ g : x \mapsto f(g(x))$, ha $\text{Ran}(g) \subseteq \text{Dom}(f)$,
- ▶ f **inverze** g , ha $f \circ g$ és $g \circ f$ is értelmes és egyenlő a megfelelő identitásfüggvénnyel ($f(g(x)) = x$ és $g(f(y)) = y$).

Tétel

Ha $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, $\lim_{y \rightarrow b} f(y) = c$, a torlódási pontja $\text{Dom}(f \circ g)$ -nek és

1. van $r > 0$, hogy $x \in B^0(a, r)$ -re $g(x) \neq b$, vagy
2. f folytonos b -ben,

akkor $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = c$.

Megjegyzés

Így a „képlettel felírt” függvények folytonosak az értelmezési tartományuk belsejében.

Korlátos zárt halmazon folytonos függvények tulajdonságai

Tétel

Ha $K \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos és zárt, $f : K \rightarrow \mathbb{R}^m$ folytonos függvény, akkor

- ▶ (Weierstrass-tétel) $\text{Ran}(f)$ korlátos és zárt,
- ▶ (Heine-tétel) f egyenletesen folytonos, azaz
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall a \in K \forall x \in B(a, \delta) : f(x) \in B(f(a), \varepsilon).$$

Megjegyzés

- ▶ Ha f valós értékű, akkor felveszi a minimumát és a maximumát.
- ▶ Ezek sokkal általánosabban igazak kompakt halmazon folytonos függvényekre:
 - ▶ Nincs távolságfüggvény, csak topológia = nyílt halmazok.
 - ▶ $f : X \rightarrow Y$ **folytonos**, ha minden $U \subset Y$ nyíltra $f^{-1}(U) = \{x \in X \mid f(x) \in U\} \subseteq X$ nyílt.
 - ▶ K **kompakt**, ha minden nyílt fedéséből kiválasztható egy véges fedés: $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i \implies \exists J \subset I$ véges : $K \subset \bigcup_{j \in J} U_j$.
 - ▶ Borel-féle lefedési tétel:
 $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\iff K$ korlátos és zárt.

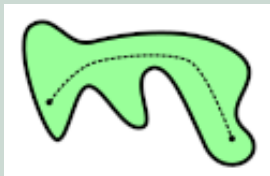
Megjegyzés

- ▶ A Bolzano-tételnek csak akkor lehet igaz, ha f valós értékű – különben $\text{Ran}(f)$ „kikerülheti” az origót.
- ▶ Korlátos zárt halmazokra nem is igaz – már egy dimenzióban sem: $f : [-2, -1] \cup [1, 2], x \mapsto \text{sgn } x$ negatív és pozitív értéket is felvesz, de a 0-t nem.

Definíció

$K \subset \mathbb{R}^m$ **útösszefüggő**, ha minden $a, b \in K$ -ra létezik olyan $L \subset K$ „út”, aminek két vége a és b .

(itt az út egy $L : [0, 1] \rightarrow K$ folytonos függvény, amelyre $L(0) = a$ és $L(1) = b$).



Tétel (Bolzano-tétel)

Ha $K \subseteq \mathbb{R}^n$ korlátos, zárt és útösszefüggő, $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ olyan folytonos függvény, ami negatív és pozitív értéket is felvesz, akkor a 0-t is.

Megjegyzés

- ▶ Egy változóban a derivált definíciója $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Ennek semmi értelme több változóban.
- ▶ A definíció átfogalmazásából érdemes kiindulni $f'(a) = B$, ha az $\varepsilon(x) = f(x) - f(a) - B(x - a)$ függvényre, amelyre $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|\varepsilon(x)|}{|x - a|} = 0$.
- ▶ Ha $X \subset \mathbb{R}^n$ és $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény, akkor B -nek egy $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ leképezésnek kell lennie.

Definíció

Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X$ belső pont és $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény. f **deriválható** a -ban, ha van olyan $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ lineáris leképezés, amelyre az $\varepsilon(x) = f(x) - f(a) - B(x - a)$ függvényre $\lim_{x \rightarrow a} \frac{|\varepsilon(x)|}{d(x, a)} = 0$. f **deriválható**, ha minden pontjában deriválható.

Definíció

Legyen f deriválható a -ban.

- ▶ f **deriváltja** az a pontban az előbbi B lineáris leképezés, jele $f'(a)$.
- ▶ f **Jacobi-mátrixa** a -ban az $f'(a)$ leképezés mátrixa.
- ▶ Ha f valósértékű, akkor a Jacobi-mátrix egy vektor, amit **gradiensének** is nevezik, jele $\text{grad } f(a)$, vagy $\nabla f(a)$.

Példa

- ▶ A konstans függvények deriválhatók, a Jacobi-mátrix mindenhol a 0 mátrix.
- ▶ Ha $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^m$, akkor az $f(x) = Bx + c$ függvények deriválhatók, a Jacobi-mátrixa mindenhol B .

Megjegyzés

Tehát a többváltozós függvény deriváltja nem egy szám, hanem egy lineáris leképezés (vagy mátrix). Az egyváltozós deriváltat is lehet – és érdemes is – az $f'(a) = (x \mapsto f'(a) \cdot x)$ függvénynek tekinteni.

Definíció

Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in X$ belső pont és $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény.

- ▶ g parciálisan deriválható az i . változója szerint az a pontban, ha az

$$x_i \mapsto g(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

egyváltozós függvény deriválható az $x_i = a_i$ -ben,

- ▶ ez a derivált az g függvény i . változó szerinti parciális deriváltja. Jele $\frac{\delta g}{\delta x_i}(a)$ (vagy $g'_i(a)$).

- ▶ g parciálisan deriválható a -ban, ha minden változója szerint parciálisan deriválható a -ban.

Tétel

Legyen $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvény, ami deriválható a -ban.

1. f Jacobi mátrixának i . sora $\text{grad } f_i(a)$
– az i . koordinátafüggvény gradiense.
2. minden i -re f_i parciálisan deriválható a -ban és
 $\text{grad } f_i(a) = \left(\frac{\delta f_i}{\delta x_1}(a), \frac{\delta f_i}{\delta x_2}(a), \dots, \frac{\delta f_i}{\delta x_m}(a) \right)$.

Megjegyzés

- ▶ így a derivált egyértelmű
- ▶ f parciálisan deriválható $\not\Rightarrow f$ deriválható, például

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Definíció

$f : X \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan deriválható a -ban, ha parciálisan deriválható a egy környezetében és a parciális deriváltak folytonosak a -ban.

Tétel

Ha f folytonosan deriválható a -ban, akkor deriválható is.

Megjegyzés

- ▶ Ez nagyon praktikus: csak parciálisan kell deriválni.
- ▶ Elég, ha egy parciális deriválton kívül a többi folytonos.
- ▶ Fordítva nem igaz: $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ deriválható $(0, 0)$ -ban, pedig a parc. deriváltak nem folytonosak.

Tétel

Legyen f többváltozós függvény, $a \in \text{Dom}(f)$ belső pont.
Ekkor f deriválható a -ban $\implies f$ folytonos a -ban.

Megjegyzés (Lánc-szabály még egyszer)

Legyen $g(a) = b$, $g'(a) = (x \mapsto Bx)$ és $f'(b) = (x \mapsto Cx)$, akkor $(f \circ g)'(a) = (x \mapsto CBx)$ - már egy változóban is.

Tétel (Lánc-szabály)

Ha g deriválható a -ban és f deriválható $g(a)$ -ban, akkor $f \circ g$ is deriválható a -ban és $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a)$.

Megjegyzés

Legyen $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ deriválhatóak, ekkor

- ▶ $f + g$ is deriválható és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ és
- ▶ ha f és g valós értékű, akkor $f \cdot g$ is deriválható és $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Tétel (Lagrange-közéértéktétel)

Legyen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ olyan függvény, ami folytonos az $[a, b] = \{ta + (1 - t)b \mid t \in [0, 1]\} \subseteq \mathbb{R}^n$ szakaszon és deriválható a nyílt (a, b) szakaszon. Ekkor van olyan $c \in (a, b)$, amelyre $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Megjegyzés

- ▶ $f'(c)(b - a)$ itt $f'(c)$ és $b - a$ skaláris szorzatát jelenti.
- ▶ Vektorértékű függvényekre ez nem igaz, pl az $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$ -re az $[0, 2\pi]$ intervallumra nincs jó c .

Tétel

Ha $X \subset \mathbb{R}^n$ útösszefüggő, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ deriválható és $f'(x) = 0$ minden $x \in X$ -re, akkor f konstans.

Emlékeztető (Inverz deriváltja)

Ha az egyváltozós f függvény deriválható egy I intervallumon $f' \neq 0$, akkor f invertálható I -n és ha az inverze g , akkor g deriválható és $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$.

Tétel (Inverzfüggvény-tétel)

Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan deriválható és $a \in X$ olyan, hogy $f'(a)$ invertálható (tehát $\det(f'(a)) \neq 0$). Ekkor a -nak van olyan környezete, ahol f invertálható és ha itt az inverze g , akkor g deriválható és $g'(y) = f'(g(y))^{-1}$.

Megjegyzés

- ▶ Fontos, hogy \mathbb{R}^n -beli pontokhoz \mathbb{R}^n -belieket rendelünk, így lesz $f'(a)$ négyzetes mátrix.
- ▶ Az inverz csak egy környezetben létezik, nem az egész X -en: például az $f(x, y) = (e^x \cdot \cos y, e^x \cdot \sin y)$ deriváltjának determinánsa mindenhol pozitív, de a f nem invertálható, hiszen $f(0, 0) = (1, 0) = f(0, 2\pi)$.

Definíció

Legyen $a \in X \subset \mathbb{R}^n$ belső pont, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és $e \in \mathbb{R}^n$ egységvektor (tehát $\|e\| = e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 = 1$). Ekkor f függvény a -beli e irányú **iránymenti deriváltja**

$$\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te) - f(a)}{t}$$

Tétel

Ha $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ deriválható a -ban, akkor $\frac{\partial f}{\partial e}(a) = \text{grad } f(a) \cdot e$.
(\cdot itt is skaláris szorzat)

Megjegyzés

- ▶ Tehát a gradiens irányában a „legmeredekebben emelkedő” a függvény grafikonja,
- ▶ azzal ellentétesen a „legmeredekebben lejtő” és
- ▶ arra merőlegesen vízszintes – azaz a szintvonalak a gradiensre merőlegesen haladnak.

Definíció

f grafikonjának a -beli érintő(hiper)síkja a következő sík

$$x_{n+1} = \text{grad } f(a) \cdot (x - a) + f(a).$$

Itt $a \cdot$ megint az \mathbb{R}^n skaláris szorzata, x_{n+1} az \mathbb{R}^{n+1} utolsó koordinátája.

Megjegyzés

Tehát az a -beli érintőhipersík normálvektora $(\text{grad } f(a), -1)$, ahogy egyváltozóban az érintőegyenes normálvektora $(f'(a), -1)$ volt.

Példa

- ▶ Az érintők most sem mindig olyanok, mint amilyenek képzeljük: például az $f(x, y) = xy$ origóbeli érintője a $z = 0$ sík.
- ▶ Tekintsük az $g(x, y) = x^3 + 3xy - y^2$ grafikonjának $A(-1, -1)$ -beli érintősíkját. Merre halad itt a szintvonal?

Definíció

Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X$ belső pont és $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ a $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ parciális derivált x_j szerinti parciális deriváltja (ha létezik).

Tétel (Young-tétel)

Ha a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ parciális deriváltak léteznek és folytonosak a egy környezetében, akkor a sorrend nem számít:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a).$$

Megjegyzés

- ▶ Lehet magasabbrendű parciális deriváltakat is definiálni, például $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$. A Young-tétel magasabbrendű verziója világosan következik az eredetiből.
- ▶ Kell a parciális deriváltak folytonossága:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{-ra } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

Definíció

Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X$ belső pont és $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény.

- ▶ f kétszer deriválható a -ban, ha f deriválható a egy környezetében, és a deriváltfüggvénye deriválható a -ban.
- ▶ Ekkor f **Hesse-mátrixa** az a pontban a

$$Hf(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i, j \leq n} \text{ mátrix.}$$

Tétel

Ha f kétszer deriválható a -ban és a második parciális deriváltjai folytonosak a -ban, akkor $Hf(a)$ szimmetrikus mátrix.

Példa

Mi az $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ függvény Hesse-mátrixa az (x, y) pontban?

Tétel

Legyen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ többváltozós függvény, ami deriválható az $a \in X$ pontban. Ha f -nek lokális szélsőértéke van a -ban, akkor $\text{grad } f(a) = 0$.

Megjegyzés (Fordítva nem igaz)

Például az $x^2 - y^2$ -nek, vagy $x^3 - y^3$ -nek nincs lokális szélsőértéke $(0, 0)$ -ban, pedig a gradiens 0.

Definíció

f -nek **nyeregpontja** van a -ban, ha van olyan v, w vektorok amelyre $f(a + tv)$ -nek lokális minimuma, $f(a + tw)$ -nek lokális maximuma van $t = 0$ -ban.

Példa

Hol van a $g(x, y) = x^3 + 3xy - y^2$ függvénynek lokális szélsőértéke?

Tétel

Legyen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ többváltozós függvény, ami kétszer deriválható az $a \in X$ pontban és $\text{grad } f(a) = 0$. Ekkor ha $Hf(a)$

1. pozitív definit, akkor f -nek lokális minimuma van a -ban,
2. negatív definit, akkor f -nek lokális maximuma van a -ban,
3. indefinit, akkor f -nek nyeregpontja van a -ban.

Megjegyzés

- ▶ A definitséget a vezető főminorok determinánsának előjelével érdemes ellenőrizni (lásd a megfelelő tételt).
- ▶ Ha $Hf(a)$ szemidefinit, akkor a tétel nem mond semmit, bármi előfordulhat – és nehezebb eldönteni, hogy mi a helyzet.

Példa

Hol vannak az $f(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + xyz$ függvény lokális szélsőértékei?

Abszolút szélsőértékek

Tétel

Legyen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor f -nek csak olyan $a \in X$ -ben lehet abszolút szélsőértéke, ahol

- ▶ $a \in X$ határpont, vagy
- ▶ f nem differenciálható a -ban, vagy
- ▶ $\text{grad } f(a) = 0$.

Megjegyzés

Az X tartomány határa itt nem csak néhány pont, hanem néhány alacsonyabb dimenziós tartomány is lehet.

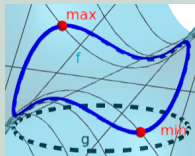
Példa

Mik az $f(x, y) = x^2 - xy - y^2$ függvény abszolút szélsőértékei a $-1 \leq x, y \leq 1$ tartományon?

Feltételes szélsőértékek

Definíció

Legyen $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ deriválható függvények. Ekkor f szélsőértékei a $g(x) = 0$ feltétel mellett az $Y = \{f(x) | g(x) = 0\}$ halmaz minimuma és maximuma (ha léteznek).



Tétel (Lagrange-féle multiplikátor módszer)

Legyen f, g mint előbb és $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x)$. Ekkor ha f -nek feltételes szélsőértéke van a -ban, akkor valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ -re $\text{grad } \mathcal{L}(a, \lambda) = 0$.

Megjegyzés

Több független feltételfüggvény (g_i) is lehet, ekkor mindegyikhez egy új változót (λ_i) kell bevezetni.

Példa

Mik az $f(x, y) = x^2 y$ függvény szélsőértékei az $x^2 + y^2 = 3$ körön?

Definíció

Legyen $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ deriválható az X útösszefüggő halmazon. Ekkor

- ▶ f **konvex** X -en, ha minden $a \in X$ belső pontra f grafikonja az a -beli érintő(hiper)síkja felett van. Azaz
$$\forall x \in X : f(x) \geq f(a) + \text{grad } f(a) \cdot (x - a).$$
- ▶ f **konkáv** X -en, ha $-f$ konvex X -en.

Megjegyzés

A konvexitás definíciójához nem kell a differenciálhatóság:

f konvex X -en \iff minden $a, b \in X$ -re az a, b -beli szelő f grafikonja felett van.

Tétel

Legyen f kétszer folytonosan deriválható az X útösszefüggő halmazon. Ekkor

1. f konvex X -en \iff minden $a \in X$ -re $Hf(a)$ pozitív definit,
2. f konkáv X -en \iff minden $a \in X$ -re $Hf(a)$ negatív definit.

Definíció

Az $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvény által meghatározott **paraméteres halmaz**, az $\{f(x) | x \in X\} \subseteq \mathbb{R}^m$ halmaz.

Megjegyzés

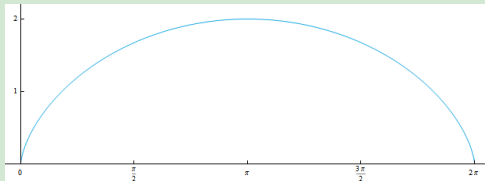
Ha $X \subset \mathbb{R}$ egy intervallum, akkor paraméteres görbéről beszélünk. Egy pontszerű objektum mozgása könnyen leírható így, t időpillanatban az $f(t)$ helyen van. Így nem csak az útvonalat (a $\text{Ran}(f)$ halmazt) ismerjük, hanem magát a mozgást (az f függvényt) is.

Példa

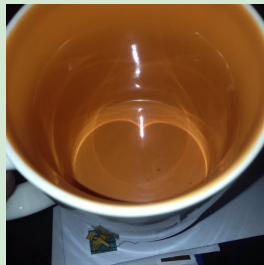
- ▶ Egyenesek paraméteres egyenlete.
- ▶ Síkok paraméteres egyenlete.
- ▶ Az $f(x, y) = ((2 + \cos x) \cos y, (2 + \cos x) \sin y, \sin x)$ függvény egy tóruszt paraméterez.

Példa

- ▶ Az $f(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$ ($t \in [0, 2\pi]$) görbe a ciklois: egy guruló kerék egy fordulásánál egy rögzített pont pályája.



- ▶ Az $f(t) = (2 \cos t - \cos 2t, 2 \sin t - \sin 2t)$ ($t \in [0, 2\pi]$) görbe a kardioid: egy körön guruló kör egy pontjának pályája.
Ez máshonnan is ismerős lehet:



Tétel

Legyen $I \subset \mathbb{R}$ intervallum $f : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenciálható $t_0 \in I$ -ben, ekkor az f által meghatározott paraméteres görbe t_0 -beli

1. sebességvektora $f'(t_0)$,
2. ha $f'(t_0) \neq 0$, akkor az f által megadott paraméteres halmaz érintő(hiper)síkjának egyenlete $f'(t_0) \cdot (x - f(t_0)) = 0$ (itt $x \in \mathbb{R}^m$, és \cdot a skaláris szorzat) és
3. ha f kétszer deriválható t_0 -ban akkor a paraméteres görbe gyorsulásvektora $f''(t_0)$.

Megjegyzés

$f''(t_0)$ itt szintén egy vektor, de ez csak az $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ függvényekre van így. Láttuk például, hogy ha $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, akkor

$Hg(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$ – ami nagyjából a második derivált – egy $n \times n$ -es mátrix.

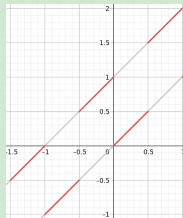
Implicit módon megadott halmazok

Definíció

Az $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ függvény által meghatározott **implicit** halmaz az $\{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$.

Példa

- ▶ A síkok egyenlete a térben ilyen: az $Ax + By + Cz = D$ síkra $F(x, y, z) = Ax + By + Cz - D$.
- ▶ Az $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ az egységkört adja – ezt elő lehet állítani két sima függvénnyel: $g_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ és $g_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Ekkor $F(x, g_1(x)) = F(x, g_2(x)) = 0$.
- ▶ Legyen $F(x, y) = (y - x)(y - x - 1)$. Hány olyan g függvény, amelyre $F(x, g(x)) = 0$? (és ha g nem feltétlen folytonos?)



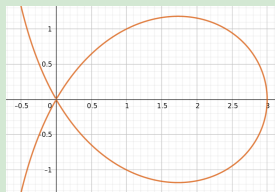
Definíció

Legyen $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ és $Y \subset \mathbb{R}^{n-1}$.

- ▶ A $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvény F **lokális megoldása** $y_0 \in Y$ -ban, ha értelmes y_0 egy teljes környezetében és ott $F(y, g(y)) = 0$.
- ▶ Az F függvénynek **egyértelmű lokális megoldása van** y_0 -ban, ha létezik olyan g lokális megoldás y_0 -ban és egy $Z \subset \mathbb{R}$ intervallum, melyre $(y, z) \in Y \times Z$ -re $F(y, z) = 0 \iff z = g(y)$.

Példa

- ▶ $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ -nak két maximális lokális megoldása a $g(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$, de $a = 1$ -ben nincs lokális megoldása.
- ▶ $G(x, y) = x^3 + xy^2 - 3x^2 + y^2 = 0$ egy elliptikus görbe, aminek az origóban nincs egyértelmű lokális megoldása.



Tétel (Implicitfüggvény-tétel)

Legyen $X \subset \mathbb{R}^n$, $a \in X$ és $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvény, ami folytonosan deriválható a egy környezetében és $\frac{\partial F}{\partial x_n}(a) \neq 0$. Ekkor F -nek egyértelmű lokális megoldása van a egy környezetében. Ha a lokális megoldás g , akkor g deriválható a -ban és $k = 1, 2, \dots, n - 1$ -re

$$\frac{\partial g}{\partial x_k}(a) = -\frac{\partial F}{\partial x_k}(a) / \frac{\partial F}{\partial x_n}(a).$$

Megjegyzés

- ▶ Az utolsó változó helyett bármelyik másikat ki lehetne fejezni a többivel, ekkor a megfelelő parciális derivált nem lehet 0.
- ▶ Így ha $\text{grad } F(a) \neq 0$, az a -beli normálvektor $\text{grad } F(a)$.
- ▶ Ez a hagyományos függvényekre is jó: $z = f(y)$ grafikonja az $F(y, z) = f(y) - z = 0$ halmaz, erre $\text{grad } F(P) = (\text{grad } f(P), -1)$.

Példa

- ▶ Mi a $G(x, y) = x^3 + xy^2 - 3x^2 + y^2 = 0$ görbe $(1, 1)$ pontbeli érintőjének meredeksége?
- ▶ Mi a $H(x, y, z) = \sin(xy) + \sin(yz) + \sin(zx) - 1/2 = 0$ felület $(\sqrt{\pi/6}, \sqrt{\pi/6}, 0)$ -beli érintősíkjának egyenlete?

Emlékeztető (Egyváltozós integrál)

Egyváltozós függvényeket a következő módon integráltunk:

1. Az $[a, b]$ intervallumnak vettük egy $\mathcal{F} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$, felosztássorozát,
2. ehhez egy (y_i) reprezentánsrendszert,
3. kiszámoltuk a megfelelő integrálközelítőösszeget:

$$S(f, \mathcal{F}, (y_i)) = \sum_{i=1}^n f(y_i)(x_i - x_{i-1})$$

4. és az integrál az ilyenek közös határértéke volt a végtelenül finomodó felosztássorozatokra és reprezentánsrendszerekre nézve.

Megjegyzés

- ▶ Mik több változóban a felosztások?
- ▶ Mi a kis darabok mértéke (területe) az integrálközelítőösszegben?

Definíció

- ▶ $A, B \subset \mathbb{R}^n$ egymásba nem nyúló, ha nincs közös belső pontjuk.
- ▶ Ha $a_1 < b_1, a_2 < b_2, \dots, a_n < b_n$, akkor $T = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ egy **tégla**, aminek mértéke $\lambda_n(T) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$.

- ▶ az $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz **külső mértéke**

$$k(A) = \inf \left(\sum_{i=1}^N \lambda_n(T_i) \mid T_i \text{ téglák, amelyekre } A \subseteq \bigcup_{i=1}^N T_i \right),$$

az A -t fedő téglák területösszegének legnagyobb alsó korlátja.

- ▶ az $A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz **belső mértéke** $b(A) = 0$, ha A nem tartalmaz téglát, különben pedig

$$b(A) = \sup \left(\sum_{i=1}^N \lambda_n(T_i) \mid \begin{array}{l} T_i \text{ egymásba nem nyúló téglák,} \\ \text{amelyekre } A \supseteq \bigcup_{i=1}^N T_i \end{array} \right),$$

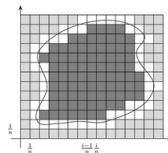
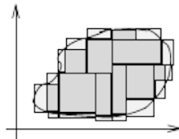
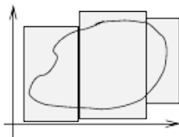
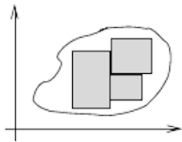
az A belsejében lévő egymásba nem nyúló téglák területösszegének legkisebb felső korlátja.

Tétel

Minden $A \subset \mathbb{R}^n$ halmazra $b(A) \leq k(A)$

Megjegyzés

A téglák „összevissza” is lehetnek, de ugyanazt kapjuk, ha „szépen rendezzük őket”:



Definíció

$A \subset \mathbb{R}^n$ korlátos halmaz

- ▶ **Jordan-mérhető**, ha $k(A) = b(A)$. Ekkor A Jordan-mértéke $\lambda_n(A) = k(A) = b(A)$.
- ▶ **nullmértékű**, ha $\lambda_n(A) = 0$.

Példa

- ▶ a $H = \{x \in [0, 1] \mid x \text{ racionális}\} \subset \mathbb{R}$ nem Jordan-mérhető,
- ▶ az egyenes/ sík/ tér „szép” halmazainak a Jordan-mértéke a hossz/ terület/ térfogat.

Tétel

Legyenek $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető halmazok

1. $C \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-mérhető \iff C korlátos és C határpontjainak halmaza nullmértékű.
2. Ha A és B egybevágóak, akkor $\lambda_n(A) = \lambda_n(B)$.
3. Ha $A, B \in \mathbb{R}^n$ egymásba nem nyúlóak, akkor $A \cup B$ is Jordan-mérhető és $\lambda_n(A \cup B) = \lambda_n(A) + \lambda_n(B)$.
4. Ha A, B Jordan-mérhető, akkor $A \cup B$, $A \cap B$ és $A - B$ is.
5. Korlátos halmazon folytonos függvény grafikonja nullmértékű.

Megjegyzés

- ▶ Egy kicsit rondább halmazok is mérhetőek: egy másik mértékkel, aminek a neve Lebesgue-mérték. Erre ha $\lambda(A_1) = \lambda(A_2) = \dots = 0$, akkor $\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$.
- ▶ A „ronda halmazok” nem lehetnek mérhetőek: egy egységgömb átdarabolható két egységgömbbé 5 darabbal (ez a Banach-Tarski paradoxon).

Definíció

- ▶ Az $A \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **átmérője**

$$\text{diam}(A) = \sup(\|x - y\| \mid x, y \in A),$$

az A pontjai között előforduló legnagyobb távolság.

- ▶ Egy B Jordan-mérhető halmaz **felosztása** egy $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ halmaz, ahol az A_i -k egymásba nem nyúló Jordan-mérhető halmazok, melyekre $B = \bigcup_{i=1}^N A_i$.
- ▶ Az \mathcal{F} felosztás **finomsága** $\max(\text{diam}(A) \mid A \in \mathcal{F})$, a legnagyobb előforduló átmérő.
- ▶ Az $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ felosztáshoz tartozó **reprezentánsrendszer** egy (y_i) sorozat, ahol $y_i \in A_i$.
- ▶ Ha $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény, akkor megfelelő integrálközelítőösszeg

$$S(f, \mathcal{F}, (y_i)) = \sum_{i=1}^N f(y_i) \lambda_n(A_i).$$

Definíció

f (Riemann-)integrálható B -n, ha minden végtelenül finomodó felosztásorozatra és reprezentánsrendszerre az integrálközelítőösszegek konvergensek.

Tétel

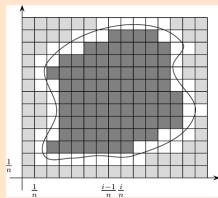
Ha f Riemann-integrálható B -n, akkor a minden végtelenül finomodó reprezentánsrendszerre a határérték ugyanaz.

Definíció

f **integrálja** B -n a fenti határérték, jele $\int_B f d\lambda_n$.

Megjegyzés

A felosztások tartalmazhatnak kis téglákat és a B halmaz határán lévőket elhagyhatjuk (ugyanis mivel B mérhető, a határa nullmértékű kell legyen, így az ezekből jövő összeg 0-hoz fog tartani).



Megjegyzés

Az integrált sokszor többes integrállal jelölik [**A**rea és **V**olume]:

▶ a síkon
$$\int_B f d\lambda_2 = \iint_B f(x, y) dA = \iint_B f(x, y) dx dy,$$

▶ a térben

$$\int_B f d\lambda_3 = \iiint_B f(x, y, z) dV = \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz.$$

Tétel

1. Ha f és g integrálhatóak B -n és $c \in \mathbb{R}$, akkor
$$\int_B f + g d\lambda = \int_B f d\lambda + \int_B g d\lambda$$
 és
$$\int_B cf d\lambda = c \cdot \int_B f d\lambda.$$
2. Ha B és B' egymásba nem nyúló mérhető halmazok és f integrálható $B \cup B'$ -on, akkor
$$\int_{B \cup B'} f d\lambda = \int_B f d\lambda + \int_{B'} f d\lambda.$$
3. Ha $f \leq g$ integrálhatóak B -n, akkor
$$\int_B f d\lambda \leq \int_B g d\lambda.$$
4. Ha f integrálható B -n, akkor
$$\left| \int_B f d\lambda \right| \leq \int_B |f| d\lambda.$$
5. Mérhető zárt halmazon folytonos függvények integrálhatóak.

Az integrál kiszámítása normáltartományokon

Tétel (Fubini-tétel, első verzió: téglalapok)

Ha $T = [a, b] \times [c, d]$ egy téglalap és $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ olyan, hogy minden rögzített $x \in [a, b]$ -re $f(x, y)$ Riemann-integrálható $[c, d]$ -n akkor $\int_c^d f(x, y) dy$ mint egyváltozós függvény integrálható $[a, b]$ -n és

$$\iint_T f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx.$$

Megjegyzés

- ▶ Ha f folytonos T -n, akkor teljesülnek a feltételek,
- ▶ különben pedig ez menet közben kiderül (a jobb oldalt felírva látjuk, hogy teljesülnek-e a feltételek.
- ▶ A zárójeleket általában el lehet hagyni.

Példa

$$\iint_{\{0 \leq x, y \leq 1\}} x \sin(\pi y) dx dy = ?, \quad \iint_{\{0 \leq x \leq y \leq 1\}} \frac{x+y}{x^2+1} dx dy = ?$$

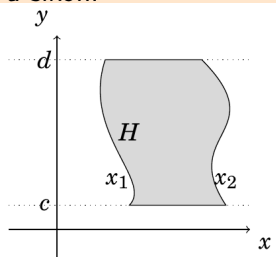
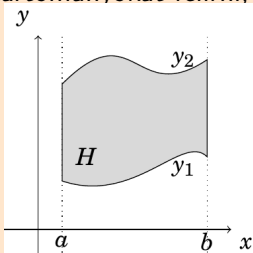
Definíció

A $H \subset \mathbb{R}^{n+1}$ **normáltartomány**, ha léteznek $X \subset \mathbb{R}^n$ mérhető halmaz és $g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, melyekre minden $x \in X$ -re $g(x) \leq h(x)$ és

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in X, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

Megjegyzés

Ugyanígy lehet az utolsó változó helyett egy másik szerint normáltartományokat felírni, például a síkon:



Tétel

Ha H normáltartomány, akkor H mérhető.

Tétel (Fubini-tétel, második verzió: normáltartományok)

Ha $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in X, g(x) \leq y \leq h(x)\}$ normáltartomány és $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, akkor f Riemann-integrálható H -n és

$$\int_H f(x, y) d\lambda_{n+1} = \int_X \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy \right) d\lambda_n.$$

Megjegyzés

- ▶ Ebből megkaphatjuk a 3 dimenziós téglákra a Fubini-tételt:

$$\iiint_T f(x, y, z) dV = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz dy dx.$$

- ▶ Ha $H = X \times [c, d]$ -n $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ alakú, akkor

$$\int_H f(x, y) d\lambda_{n+1} = \int_X f_1(x) d\lambda_n \cdot \int_c^d f_2(y) dy.$$

- ▶ A folytonosság helyett elég, ha f korlátos és a szakadási pontjainak halmaza nullmértékű.

Példa

Legyen $H = \{(x, y) \mid x \in [0, 1], 0 \leq y \leq x^2\}$. Mennyi $\iint_H xy dA$?

Tétel

Legyen $H \subset \mathbb{R}^2$ mindkét irányból normáltartomány, azaz

$$\begin{aligned} H &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a_1, b_1], g_1(x) \leq y \leq h_1(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in [a_2, b_2], g_2(y) \leq x \leq h_2(y)\} \end{aligned}$$

valamely $a_1 < b_1, a_2 < b_2 \in \mathbb{R}$ -re és $g_1(x) \leq h_1(x), g_2(y) \leq h_2(y)$ függvényekre, továbbá $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos. Ekkor

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{g_1(x)}^{h_1(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{g_2(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Vigyázz!

A határookra figyelni kell:

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{g_1(x)}^{h_1(x)} f(x, y) dy \right) dx \neq \int_{g_1(x)}^{h_1(x)} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy,$$

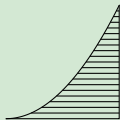
hiszen a jobb oldal nem is értelmes.

Példa

- ▶ Van, hogy a sorrend megcserélése nélkül nem is tudnánk

integrálni, például $\int_0^1 \int_x^1 e^{-y^2} dy dx = ?$.

- ▶ Hogyan lehet a $H = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ -en az integrálás sorrendjén változtatni?



A szakaszok $(x, 0)$ -tól
 (x, x^2) -ig tartanak.

A szakaszok (\sqrt{y}, y) -tól
 $(1, y)$ -ig tartanak.

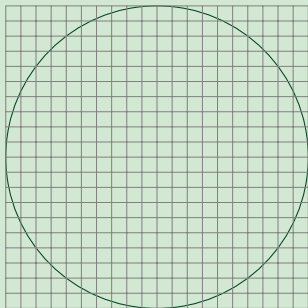
$$\text{Így } \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx dy.$$

Példa

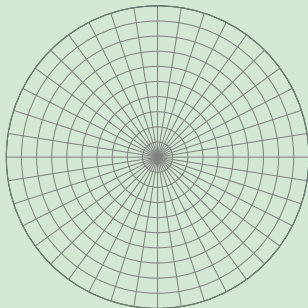
Kérdés: Legyen $K = B((0, 0), 1)$ az origó középpontú egységkör.
Mennyi $\iint_K \sin(x^2 + y^2) dA$?

Gond: Se x szerint, se y szerint nem tudjuk integrálni, és az integrálási tartomány is ronda.

Ötlet: Ne téglalapokra osszuk a tartományt!



helyett



$$\text{Így } \iint_K \sin(x^2 + y^2) dA = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sin(r^2) \cdot r d\varphi dr = \pi(1 - \cos 1).$$

Tétel

Legyen $U \subset \mathbb{R}^n$ nyílt, $g : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonosan differenciálható és $Y \subset U$ egy zárt, Jordan-mérhető halmaz, amelynek belsejében g injektív, továbbá $g(Y) = \{g(y) | y \in Y\}$. Ha $f : g(Y) \rightarrow \mathbb{R}$ integrálható, akkor

$$\int_{g(Y)} f(x) dx = \int_Y f(g(y)) \cdot |\det(g'(y))| dy.$$

Megjegyzés

- ▶ Az előbbi integrál ennek egy nagyon speciális esete.
- ▶ Egyváltozóban ez a helyettesítéses integrál (hiszen ekkor $\det(g'(y)) = g'(y)$).
- ▶ Több változóban ezt főleg akkor érdemes használni, ha az integrálási tartomány „ronda”.
- ▶ Az inverzfüggvénytétel szerint, ha $\det(g'(y)) \neq 0$, akkor y egy környezetében teljesülnek a feltételek.
- ▶ A következő diákon néhány gyakran előforduló transzformáció lesz – ezekre nem kell ellenőrizni a feltételeket.

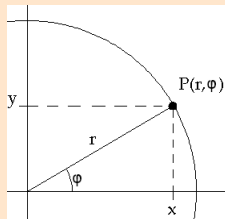
Megjegyzés

Ha az integrálási tartomány kör, körszelet, körgyűrű, vagy ilyesmi akkor a polárkoordinátákat érdemes használni:

$g(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ esetén

$$\det(g'(r, \varphi)) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r,$$

így „ $dydx = r drd\varphi$ ”.



Példa

- ▶ Legyen A az origó középpontú 1 sugarú kör „első nyolcada”. Mennyi $\iint_A xy \, dx dy$?
- ▶ Legyen B az origó középpontú 1 és 2 sugarú körök közés eső gyűrű. Mennyi $\iint_B \sqrt[3]{x^2 + y^2} \, dx dy$?

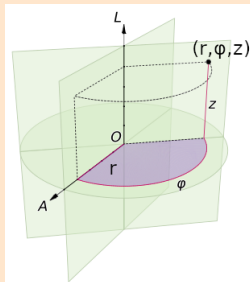
Megjegyzés

Ha az integrálási tartomány henger, kúp, vagy ehhez hasonló, akkor hengerkoordinátákat érdemes használni:

$g(r, \varphi, z) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, z)$ esetén

$$\det(g'(r, \varphi, z)) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

így „ $dzdydx = r dzd\varphi dr$ ”.



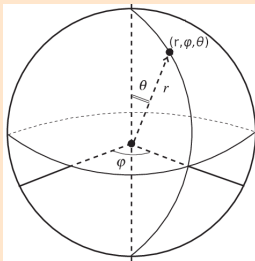
Példa

Legyen $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

Mennyi $\iiint_A xy + e^{z^2} dV$?

Megjegyzés

Ha az integrálási tartomány gömb, ellipszoid, vagy ehhez hasonló, akkor gömbi koordinátákat érdemes használni:
 $g(r, \varphi, \theta) = (r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \theta)$
esetén $\det(g'(r, \varphi, \theta)) = \dots = -r^2 \sin \theta$,
így „ $dzdydx = r^2 |\sin \theta| d\theta d\varphi dr$ ”.



Példa

Legyen A az origó középpontú 1 sugarú gömb felső fele.
Mennyi $\iiint_A xy \, dV$?

Terület- és térfogatszámítás

Tétel

Ha B két (ill. három) dimenziós mérhető halmaz, akkor B területe (ill. térfogata) $\iint_B 1 \, dA$ (ill. $\iiint_B 1 \, dV$).

Példa

- ▶ Mennyi az r sugarú gömb térfogata?
- ▶ Mennyi az r sugarú, m magasságú kúp térfogata?

Tétel

Ha $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in X, g(x) \leq y \leq h(x)\} \subset \mathbb{R}^3$ egy normáltartomány, akkor a térfogata $\iint_X h(x) - g(x) \, dA$.

Példa

Mennyi a $z = x + y$ és a $z = x^2 + y^2$ felületek által határolt korlátos tartomány térfogata.

Improprius integrál

Definíció

Ha $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív függvény, ami integrálható minden mérhető halmazon, akkor

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda_n = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{[-r, r]^n} f \, d\lambda_n,$$

amennyiben a határérték létezik.

Példa

Mennyi $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dA$?

Megjegyzés

Ha f negatív értéket is felvehet, akkor ez a definíció nem jó (lehet, hogy a kockákon konvergál az integrál, de más halmazokon nagyon ronda). Ekkor

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda_n = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{[-r, r]^n} f_+ \, d\lambda_n - \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{[-r, r]^n} f_- \, d\lambda_n,$$

ahol $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ és $f_-(x) = \max(-f(x), 0)$.

Definíció

Ha B egy mérhető halmaz és $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ nemnegatív függvény, ami nem korlátos B -n, akkor

$$\int_B f d\lambda_n = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_B \min(f(x), M) d\lambda_n,$$

ha ezek a függvények integrálhatóak B -n és a határérték létezik.

Megjegyzés

- ▶ Tehát a grafikon tetejét kell „levágni”.
- ▶ Itt is vigyázni kell, ha a függvény negatív értéket is felvehet.

Példa

Legyen $B = B(0, 1)$ az origó középpontú, 1 sugarú kör. Mely p -re létezik (és mennyi) $\iint_B \frac{1}{|(x, y)|^p} dA$?

Sorok

Numerikus sorok = végtelen összegek

Definíció

Legyen $(a_n) \in \mathbb{R}$ egy sorozat, ekkor az (a_n) összege a részletösszegeinek a határértéke: legyen

$s_n = \sum_{m=1}^n a_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, ekkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, ha ez a határérték létezik, különben nem értelmes (nincs összeg).

Példa

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$?

Tétel

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $a_n \rightarrow 0$.

Vigyázz! (Visszafelé nem igaz)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Tétel

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$ és $c \in \mathbb{R}$, akkor

1. $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$,
3. (a_n) véges sok tagjának összekeverése nem változtatja az összeg határértékét és
4. (a_n) véges sok tagjának megváltoztatása nem változtatja meg, hogy az összeg konvergens-e.

Megjegyzés

- ▶ A tagok megváltoztatása a határértéket befolyásolja, úgyhogy ez sokkal nehezebb, mint a határértékszámítás.
- ▶ Sokszor csak az a kérdés, hogy a sor konvergens-e, nem maga a határérték.

Példa

Konvergens-e és ha igen mi az értékük: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$?

Amikor „könnyen” ki lehet számolni az összeget

Tétel (Mértani összegek)

Ha $a_1 > 0$ és van olyan $q \in \mathbb{R}$, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -re $a_{n+1} = qa_n$, akkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} \frac{a_1}{1-q}, & \text{ha } |q| < 1 \\ \infty, & \text{ha } q \geq 1 \\ \text{nem létezik,} & \text{ha } q \leq -1 \end{cases}$$

Példa

Mennyi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$?

Tétel (Teleszkópos összegek)

Ha van olyan $(b_n) \rightarrow b$ sorozat, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -re $a_n = b_{n+1} - b_n$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b - b_1$.

Megjegyzés

Ha $a_n = b_{n+k} - b_n$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = kb - (b_1 + b_2 + \dots + b_k)$.

Konvergenzkritériumok

Tétel (Minoráns-kritérium)

Ha $a_n \geq b_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Tétel (Majoráns-kritérium)

Ha $0 \leq a_n \leq b_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

Megjegyzés

Csak az kell, hogy egyenlőtlenségek elég nagy n -re teljesülnek: legyen olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_0$ -ra pl $a_n \leq b_n$.

Példa

Konvergens-e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3+2}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-n}{n^3+2}$?

Tétel (Gyökkritérium)

Legyen (a_n) nemnegatív tagú sorozat.

1. Ha van olyan $q > 1$ és $n_0 \in \mathbb{N}$ szám, hogy $n > n_0$ esetén $\sqrt[n]{a_n} > q$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
2. Ha van olyan $q < 1$ és $n_0 \in \mathbb{N}$ szám, hogy $n > n_0$ esetén $\sqrt[n]{a_n} < q$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

Példa

Mely $a \in \mathbb{R}$ -re konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2a-3)^n}{3 \cdot 5^n}$?

Vigyázz! ($q = 1$ esetén nem tudunk semmit)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

Tétel (Hányadoskritérium)

Legyen (a_n) nemnegatív tagú sorozat.

1. Ha van olyan $q < 1$ és $n_0 \in \mathbb{N}$ szám, hogy $n > n_0$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q, \text{ akkor } \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

2. Ha van olyan $q > 1$ és $n_0 \in \mathbb{N}$ szám, hogy $n > n_0$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q, \text{ akkor } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty.$$

Példa

Konvergencia-e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$ és $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$?

Vigyázz!

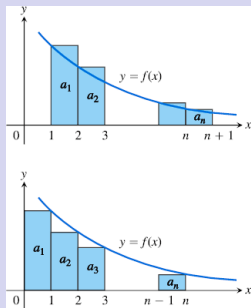
$q = 1$ esetén most sem tudunk semmit.

Tétel (Integrálkritérium)

Legyen (a_n) nemnegatív tagú sorozat és $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton csökkenő függvény, amelyre minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n = f(n)$.

1. Ha $\int_0^{\infty} f(x) dx < \infty$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

2. Ha $\int_0^{\infty} f(x) dx = \infty$, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.



Példa

Mely c -re konvergens $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$? Konvergens-e $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$?

Megjegyzés

Az összes kritériumnál csak az kell, hogy a feltételek elég nagy n -re teljesülnek.

Megjegyzés

Kérdés: Volt, hogy egy sor összegét nem változtatja, ha felcseréljük néhány tagját. Akárhogyan átrendezhetjük a tagokat?

Válasz: Nem! Például $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ tagjait tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ -re lehet úgy rendezni, hogy az összeg c legyen (vagy divergens legyen/ne létezzen).

Definíció

- ▶ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **abszolút konvergens**, ha $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergens,
- ▶ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **feltételesen konvergens**, ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, de nem abszolút konvergens.

Tétel

Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abszolút konvergens, akkor a tagjait tetszőlegesen átrendezve az összeg nem változik.

Leibniz-típusú sorok

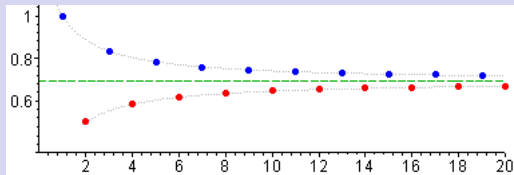
Definíció

Ha $a_n \rightarrow 0$ monoton csökkenő sorozat, akkor a

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ és $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ sorokat **Leibniz-típusúnak** nevezik.

Tétel

Ha egy sor Leibniz-típusú, akkor konvergens.



Példa

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ konvergens.

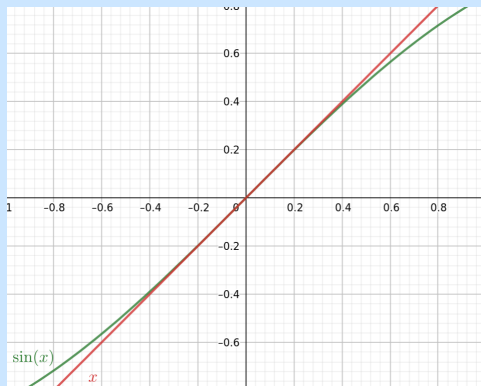
Be fogjuk látni, hogy az összeg $\ln 2$.

Emlékeztető

Már biztos használtad, hogy „ $\sin x \approx x$, ha x közel van 0-hoz”.

Kérdés:

- ▶ Pontosán mit jelent ez?
- ▶ Honnét tudja a számológép, hogy mennyi $\sin 1$?
- ▶ Hogy lehet ilyenekre rájönni?



Definíció

Legyenek f és g valós függvények, $n \in \mathbb{N}$. Ekkor

- ▶ ha f és g n -szer differenciálhatók x_0 -ban és $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, $f''(x_0) = g''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, akkor f és g **legalább n rendben érintkezik** x_0 -ban,
- ▶ ha f és g $n + 1$ -szer differenciálhatók x_0 -ban és $f(x_0) = g(x_0)$, $f'(x_0) = g'(x_0)$, $f''(x_0) = g''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, de $f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$, akkor f és g **(pontosan) n rendben érintkezik** x_0 -ban.

Tétel

Ha f n -szer differenciálható x_0 -ban, akkor pontosan egy olyan T_n polinom van, amire $\deg(T_n) \leq n$ és ami legalább n rendben érintkezik f -el x_0 -ban. Ezt pontosan meg is lehet adni:

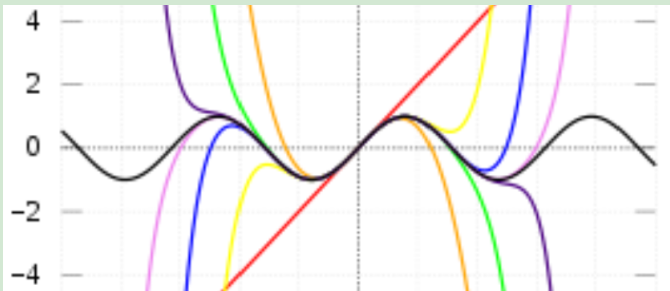
$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Definíció

A fenti T_n polinom az f függvény x_0 pontbeli n . Taylor-polinomja.

Példa

- ▶ Például az x_0 -beli érintő az első x_0 -beli Taylor-polinom,
- ▶ $\sin x$ 0-bel első és második Taylor-polinomja
 $T_1(x) = T_2(x) = x$, a harmadik $T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ és
- ▶ még néhány magasabb rendű Taylor-polinom:



A fekete a $\sin x$, a többi a $T_n(x)$ ($n=1, 3, 5, 7, 9, 11$ és 13)

Tétel (Taylor-formula)

Ha f valós függvény $n + 1$ -szer differenciálható egy x_0 -t tartalmazó I intervallumban, akkor $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, ahol $R_n(x)$ -t maradéktagnak nevezzük: létezik olyan $x' \in I$ egy alkalmas szám x_0 és x között, amelyre

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x')}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

Példa

sin 1 4 tizedesjegy pontosságú kiszámolásához: $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$ és $x = 1$ -re a maradétag $|R_n(1)| \leq \frac{1}{(n+1)!}$. Így ha

$(n+1)! > 10^4$, akkor elég az n . Taylor-polinom 1-beli helyettesítési értékét kiszámolni. $n = 7$ jó, $T_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$, így

$$\sin 1 \approx T_7(1) = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} = \frac{4241}{5240} \approx 0,841468.$$

Számológéppel $\sin 1 = 0,8414709848$ – kicsit nagyobb n -el számolt.

Megjegyzés (Néhány hasznos Taylor-polinom)

Az alábbi f függvények 0 körüli n -edik Taylor-polinomja és a hibatag egy felső becslése (tehát $|R_n(x)| \leq R_n$)

$f(x)$	$T_n(x)$	R_n
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots$	$\frac{ x ^{n+1}}{(n+1)!}$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \dots$	$\frac{ x ^{n+1}}{(n+1)!}$
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$	$\frac{ x ^{n+1}}{(n+1)!}$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + \dots$	*

* = $\frac{|x|^{n+1}}{n+1}$, ha $0 \leq x < 1$ és * = $\frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)}$, ha $-1 < x \leq 0$.

Megjegyzés (Ez több változóban is megy.)

- ▶ Ha $X \subset \mathbb{R}^m$, $a \in X$ és $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ egy n -szer differenciálható függvény, akkor az n . Taylor polinomja az a pontban

$$T_n(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} \frac{1}{|\alpha|!} \cdot \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}(a) \cdot (x - a)^\alpha,$$

ahol a szumma azon $\alpha \in \mathbb{Z}^m$ szám- m -eseken fut végig, ahol $\alpha_i \geq 0$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m \leq n$ és itt $(x - a)^\alpha = (x_1 - a_1)^{\alpha_1} (x_2 - a_2)^{\alpha_2} \dots (x_m - a_m)^{\alpha_m}$.

- ▶ Ha f még $n + 1$ -szer folytonosan differenciálható is a egy $\delta > 0$ sugarú környezetében és $\|x - a\| < \delta$, akkor $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, ahol alkalmas $\|b - a\| < \delta$ -ra

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}(b) \cdot (x - a)^\alpha.$$

- ▶ Ennek egy speciális esete a többváltozós függvények szélsőértéktípusának meghatározásánál használt módszer:
 $T_2(x) = f(a) + \text{grad } f(a) \cdot (x - a) + (x - a)^T \cdot Hf(a) \cdot (x - a)/2$.
Ha $\text{grad } f(a) = 0$ és $Hf(a)$ nem indefinit, akkor $(x - a)^T \cdot Hf(a) \cdot (x - a)$ nagyságrendje δ^2 , míg $R_2(x)$ -é δ^3 .

Megjegyzés

Így már majdnem látjuk, hogy $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln 2$, de csak majdnem: $x = 1$ -re már pont nincs becslésünk.

Definíció

Legyenek minden $n \in \mathbb{N}$ -re f_n egy valós függvény.

- ▶ Az (f_n) **függvénysorozat** az f_1, f_2, f_3, \dots sorozat.
- ▶ (f_n) **értelmezési tartománya** $\text{Dom}((f_n)) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Dom}(f_n)$.
- ▶ (f_n) függvénysorozat **pontonként konvergál** az $X \subset \text{Dom}((f_n))$ tartományon az $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez, ha minden $x \in \text{Dom}((f_n))$ -re az $f_n(x)$ sorozat tart $f(x)$ -hez.

Példa

Hol értelmes és konvergens az $f_n(x) = x^n$ függvénysorozat. Melyik függvényhez konvergál?

Vigyázz!

Folytonos (ill. deriválható, vagy integrálható) függvények sorozata nem feltétlen folytonos (ill. deriválható, vagy integrálható)

Definíció

Az f_n függvénysorozat **egyenletesen konvergál** az $X \subset \text{Dom}((f_n))$ tartományon az $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_0$ -ra és $x \in X$ -re $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Megjegyzés (Azaz minden ε -hoz van egy közös n_0)

$\forall x \in X \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ helyett
 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 \forall x \in X : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Tétel

Ha az X tartományon az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál f -hez és az f_n függvények folytonosak, akkor f is folytonos. Ugyanez igaz folytonos helyett deriválható és integrálható függvényekre.

Definíció

Legyenek minden $n \in \mathbb{N}$ -re f_n egy valós függvény.

- ▶ A $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **függvénysor** az f_1, f_2, f_3, \dots függvények összege.
- ▶ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **értelmezési tartománya** $\text{Dom}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Dom}(f_n)$.
- ▶ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **konvergenciatartománya** azon $x \in \text{Dom}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)$ számok halmaza, melyre a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ sor konvergens.
- ▶ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ **összegfüggvénye** az az F függvény, amelyhez a részletösszegek sorozata pontonként konvergál.

Vigyázz!

A függvénysorok nem deriválhatóak, vagy integrálhatóak tagonként!

Definíció

Az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az

$X \subset \text{Dom} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)$ tartományon az $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ függvényhez, ha

minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_0$ -ra és

$x \in X$ -re $\left| \sum_{m=1}^n f_m(x) - F(x) \right| < \varepsilon$.

Tétel

Ha az X tartományon az $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ függvénysorozat egyenletesen konvergál F -hez, akkor a sor tagonként deriválható és integrálható:

1. ha minden n -re f_n deriválható, akkor F is és $F' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ és
2. ha minden n -re f_n integrálható, akkor F is és

$$\int F(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n(x) dx.$$

Hatványsorok és Taylor-sorok

Definíció

A **hatványsorok** speciális alakú függvénysorok: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, ahol minden n -re $a_n \in \mathbb{R}$ és $x_0 \in \mathbb{R}$ és $(x - x_0)^0 = 1$ minden x -re.

Tétel (Cauchy-Hadamard tétel)

Legyen $\alpha = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ és $R = 1/\alpha$ (α és R lehet 0 és ∞ is).

Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ sor konvergens az $(x_0 - R, x_0 + R)$ intervallumon és divergens az $[x_0 - R, x_0 + R]$ intervallumon kívül.

Definíció

A fenti jelölésekkel a hatványsor **középpontja** x_0 és **konvergenciasugara** R .

Példa (A határon bármi lehet)

Hol konvergens $d = 0, 1, 2$ -re $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n^d$ és $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$?

Tétel

A hatványsorok egyenletesen konvergens $(x_0 - r, x_0 + r)$ -en, minden $r < R$ -re, tehát a hatványsorok tagonként deriválhatók és integrálhatók a konvergenciatartományuk belsejében.

Megjegyzés

Kérdés: jól lehet-e a függvényeket hatványsorral közelíteni?

Válasz: a „szép” függvényeket nagyon jól, de azért nem mindent.

Definíció

Ha f függvény végtelen sokszor differenciálható az x_0 pontban,

akkor f **Taylor-sora** x_0 -ban
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Itt $f^{(n)}$ az n . derivált és $f^{(0)} = f$.

Példa

Mi e^x , $\sin x$ és $\ln(1 + x)$ Taylor-sora az $x_0 = 0$ -ban?

Példa

Az $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$ függvény végtelen sokszor

differenciálható az $x_0 = 0$ pontban, és minden deriváltja 0.

Tehát a Taylor-sora 0.

Tétel

Ha f végtelenszer differenciálható az $I \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ intervallumon és van olyan $K \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ -re és $x \in I$ -re $|f^{(n)}(x)| < K$, akkor f -t előállítja a Taylor-sora I -n, azaz

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Megjegyzés

A $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ egyenletesen konvergens a $[0, 1]$ zárt intervallumon így az összegfüggvénye folytonos. Ebből végre lehet látni, hogy $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$.

Emlékeztető

Egy hatványsor konvergenciatartománya az összegfüggvény a középponthez legközelebbi szingularitásáig ér:

- ▶ $\sum x^n$ összegfüggvénye $\frac{1}{1-x}$, $R = |1 - 0| = 1$.
- ▶ $\sum ((x+2)/3)^n$ összegfüggvénye is $\frac{1}{1-x}$, $R = |1 - (-2)| = 3$.
- ▶ $\sum (-x)^n/n$ összegfüggvénye $\ln(1+x)$, $R = |-1 - 0| = 1$.
- ▶ $\sum x^n/n!$ összegfüggvénye e^x , ami értelmes \mathbb{R} -n, $R = \infty$.

Megjegyzés (Vagy mégsem?)

$\sum (-1)^n x^{2n}$ összegfüggvénye $\frac{1}{1+x^2}$, ami „szép”, mégis $R = 1$!

Megoldás: nézzük \mathbb{C} felett, így $\pm i$ -ben baj van.

Tétel

Ugyanúgy megy minden komplex számokkal.

Komplex exponenciális függvény

Definíció

Legyen $z \in \mathbb{C}$ -re $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Tétel

1. Ez értelmes, a sor minden $z \in \mathbb{C}$ -re konvergens.
2. Ha $y \in \mathbb{R}$, akkor $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, specálisan $e^{i\pi} = -1$.
3. $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$.

Megjegyzés

- ▶ A komplex exponenciális függvény periodikus, a periódusa $2\pi i$.
- ▶ Ugyanígy lehet értelmez az a^z függvényt tetszőleges $a > 0$ valósra: $a^z = e^{z \cdot \ln a}$.
- ▶ Viszont a logaritmusfüggvény és a nempozitív alapú hatványfüggvények nem értelmezhetők az egész \mathbb{C} -n.

Komplex trigonometrikus függvények

Definíció

Legyen $z \in \mathbb{C}$ -re $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ és $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$.

Tétel

1. Ez értelmes, a sorok minden $z \in \mathbb{C}$ -re konvergensek.

2. $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$ és $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

3. Ha $y \in \mathbb{R}$, akkor $\cos(iy) = \operatorname{ch} y$ és $\sin(iy) = i \cdot \operatorname{sh} y$.

Megjegyzés

- ▶ A komplex trigonometrikus függvények nem korlátosak.
- ▶ Nem véletlen, hogy a hiperbolikus függvények ennyire hasonlítottak a trigonometrikus függvényekre: ugyanannak a komplex függvénynek egy-egy egyenesre vett megszorításai.

Megjegyzés

A hatványsorok – $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ alakú sorok – helyett más speciális alakú függvénysorokat is érdemes vizsgálni. Két példa:

- ▶ Az $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(np\pi x) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin(mp\pi x)$ alakú sorok a **Fourier-sorok**. A $2\pi p$ szerint periodikus függvényeket lehet hullámfüggvények összegére bontani. Amikor többféle hangot egyszerre hallunk, akkor automatikusan Fourier-sorfejtést csinálunk.
- ▶ A $\Lambda(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ alakú sorok a **Dirichlet-sorok**. Például ha $a_n = 1$ minden n -re, akkor a Riemann-zeta függvényt kapjuk. Ezek vizsgálata nagyon nehéz, de számelméleti szempontból nagyon fontos.

Tartalomjegyzék

1. Lineáris algebra

1. Lineáris egyenletrendszerek és megoldásaik
2. Vektorterek
3. Mátrixok
4. Determinánsok
5. Lineáris leképezések
6. Skaláris szorzatok és normák

2. Többváltozós függvények

1. Határérték és folytonosság
2. Deriválás
3. Szélsőértékszámítás
4. Paraméteres és implicit módon megadott halmazok
5. Mérték és integrál
6. Az integrál kiszámítása

3. Sorok

1. Numerikus sorok
2. Függvénysorozatok
3. Függvényesorok