Algebra 1. **1. feladatsor** **2023.09.06.**

Félcsoportok és csoportok

1. Mik a szabályos n-szög a) irányítástartó szimmetriái, b) szimmetriái? (Szimmetria alatt a sík olyan izometriáit értjük, amik az n-szöget önmagára képezik)

2. a) Mik a szabályos tetraéder szimmetriái? Melyek közülük irányítástartóak?
   b) Mik a kocka szimmetriái? Melyek közülük irányítástartóak?
   (Itt a szimmetriák a tér azon izometriái, amelyek helyben hagyják a tetraédert, illetve a kockát)

3. Keverjünk meg egy n darab különböző kártyából álló paklit!
   a) Hány különböző végeredményt kaphatunk?
   b) Mutasd meg, hogy bármelyik elérhető úgy is, hogy csak szomszédos kártyákat cserélünk ki!
   c) Elérhető minden keverés úgy is, hogy „majdnem szomszédos” kártyákat cserélhetünk? (a k. a $k+2$-kel, $1 \leq k \leq n-2$-ra)?
   d) És ha egy lépésben $1 \leq k \leq n-2$-re a k. kártyát a $k+2$. helyre tehetjük (így a $k+1$. a k. helyre kerül és a $k+2$. a $k+1$.-re)?
   e)* A b) részben $n-1$ különböző „alap keverés”-t alkalmaztunk, hogy az összes lehetséges sorrendet elérhessük. Lehetséges kevesebbel mindent elérni? Legalább hány „alap keverés” kell?

4. Tekintsünk egy Rubik-kockát! Nevezzük F-nek az első lap (front side) 90°-os órajárás szerinti forgatását. Hasonlóan B, L, R, U és D a hátsó, a bal, a jobb a felső és az alsó (back, left, right, upper és bottom helyett down side) oldalak 90°-os órajárás szerinti forgatása.
   a) Mutasd meg, hogy a kocka minden olyan mozgatása, ami az oldalak középső lapjait helyben hagyja elérhető a fenti 6 forgatás felhasználásával.
   b) Legyen $X = FB$ – az F és a B forgatás kompozíciója. Hányszor kell az X mozgatást ismételni ahhoz, hogy a kocka az eredeti állapotába kerüljön?
   c) Legyen $Y = F^2L^2$. Hányszor kell az Y mozgatást ismételni, ahhoz, hogy a kocka az eredeti állapotába kerüljön?
   d)* Vannak-e a kockának olyan mozgatásai, amiket 6-szor, 5-ször illetve 13-szor kell ismételni ahhoz, hogy a kocka az eredeti állapotába kerüljön?

---

5. Legyen $S = \langle H, * \rangle$ a balzéró félcsoport a nem üres H halmazon ($x*y = x$ igaz minden x, y elempárra). Mik S kongruenciái?

6. Mik a Z_3 és Z_4 additív félcsoportok (egészek modulo 3 és modulo 4) kongruenciái?

7. Írd le a Cayley-táblázatát néhány olyan csoportnak, ami nem szerepelt az előadáson!
   (Pl D_4, azaz a négyzet szimmetriái; Q , azaz a kvaterniócsoport és $\mathrm{GL}(\mathbb{F}_2)$, azaz a kételemű test feletti 2×2-es invertálható mátrixok csoportja)

8. A következők közül melyek félcsoportok és melyek csoportok?
   a) $(\mathbb{Z}, \cdot)$, b) $(\mathbb{Z}, +)$, c) $(\mathbb{Z}, -)$, d) $(\mathbb{R}, (x, y) \mapsto \log(x+y))$, e) $(\mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{xy})$, f) $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, g) $((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*, \cdot)$.

   A következőkben $\circ$ a függvények kompozíciója:
   h) ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények, $\circ$), i) ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineáris függvények, $\circ$), j) ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ szürjektív lineáris függvények, $\circ$).

   A következőkben A egy halmaz, $\mathcal{P}(A)$ a hatványhalmaza (azaz $\mathcal{P}(A) = \{B | B \subseteq A\}$):
   k) $(\mathcal{P}(A), \cap)$, l) $(\mathcal{P}(A), \cup)$, m) $(\mathcal{P}(A), \Delta)$ – itt $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$.

   És végül a Lorentz-csoport:
   n) $(\{r \in \mathbb{R} | \, |r| < c\}, *)$, ahol $c > 0$ fix és $r * s = \dfrac{r+s}{1 + rs/c^2}$.

9. * Mutasd meg, hogy a $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ mátrixcsoport minden eleme egy origón átmenő tengely körüli forgatás mátrixa!

A feladatsorok elérhetők a honlapomon: `www.math.bme.hu/~merdelyi/alg1/`