Algebra 1. **2. feladatsor** **2023.09.13.**

Csoportok és részcsoportok

1. Mely n természetes számokra Abel-csoport $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (és $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$)?
2. Legyen G olyan csoport, melyben tetszőleges a, b, c nem egységelemekre $abc = cba$. Mutasd meg, hogy G Abel!
3. Legyen G olyan csoport, hogy $\forall g \in G : g^2 = e$. Mutasd meg, hogy G Abel! Igaz-e ez, ha csak $g^4 = e$-t teszünk fel $g^2 = e$ helyett?
4. Tegyük fel, hogy a G csoportban $a^{-1}ba = b^{-1}$ és $b^{-1}ab = a^{-1}$ valamely $a, b \in G$-re. Mutasd meg, hogy ekkor $a^2 = b^2$ és $a^4 = b^4 = e$!
5. * Mutasd meg, hogy egy csoport a, b elemeire $ab^2 = b^3a$ és $ba^2 = a^3b$, akkor $a = b = e$!

---

6. Legyen $\mathbb{F}$ egy test. Mutasd meg, hogy a) a diagonális, b) a felső háromszögmátrix elemek halmaza részcsoportot alkot a $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ csoportban!
7. Mik $(Z_p, +)$ és $(Z_{p^2}, +)$ részcsoportjai? ($(Z_n, +)$ a modulo n maradékosztályok additív csoportja)
8. Mik D_n részcsoportjai? (D_n a diédercsoport: a szabályos n-szög szimmetriacsoportja)

---

9. Legyenek A és B a G csoport részcsoportjai. Lásd be, hogy az $AB = \{ab | a \in A, b \in B\}$ komplexus-szorzat akkor és csak akkor részcsoport, ha $AB = BA$!
10. Legyen $H = \{t, f\} \subset D_n$. Mi $H^2 = HH$, H^3? Létezik-e $m \in \mathbb{N}$, melyre $H^m = D_n$? Ha igen, mi a legkisebb ilyen m?
11. * Legyen A és B a G véges csoport két részcsoportja. Bizonyítsd be, hogy $|AB| = \dfrac{|A| \cdot |B|}{|A \cap B|}$.

---

12. A következők közül melyek (fél)csoport homomorfizmusok?
    a) $\alpha : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}, +), n \mapsto 2n$,
    b) $\beta : (\mathbb{Z}, +) \to (Z_n, +), m \mapsto m \bmod n$,
    c) $\gamma : (Z_n, +) \to (\mathbb{Z}, +), m \bmod n \mapsto m$ minden $m = 0, 1, \ldots, n-1$-re,
    d) $\delta : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}, +), a \mapsto a_{1,1}$ (az a mátrix bal felső eleme) és
    e) $\varepsilon_g : G \to G, x \mapsto gxg^{-1}$ tetszőleges G csoportra és $g \in G$-re.
    Melyek közülük monomorfizmusok és epimorfizmusok?
13. Legyen Q a kvaterniócsoport és D_{12} a megfelelő (24 elemű) diédercsoport. Van-e olyan $\varphi : Q \to D_{12}$ csoporthomomorfizmus, melyre
    a) $\varphi(i) = f^4$ (a 120° órajárás szerinti forgatás),
    b) $\varphi(i) = t$ (egy tükrözés) és
    c) $\varphi(i) = f^3$ (a 90°-os órajárás szerinti forgatás)?

A feladatsorok elérhetők a honlapomon: `www.math.bme.hu/~merdelyi/alg1/`