Algebra 1. **3. feladatsor** **2023.09.20.**

Homomorfizmusok és normálosztók

1. Mutasd meg, hogy a Q kvaterniócsoport minden részcsoportja normálosztó!

2. Legyen G csoport és $H \leq G$. Döntsd el, melyek igazak az alábbi állítások közül.
a) Mindig van olyan homomorfizmus G-ből, amelynek a magja H.
b) Ha $H \lhd G$, akkor van olyan homomorfizmus G-ből, amelynek a magja H.
c) Mindig van olyan homomorfizmus G-be, melynek a képe H.
d) Tetszőleges $\varphi : G \to K$ homomorfizmusnál $\varphi(H) \leq K$.
e) Ha $H \lhd G$, és $\varphi : G \to K$ homomorfizmus, akkor $\varphi(H) \lhd K$.
f) Ha $H \lhd G$, és $\varphi : G \to K$ homomorfizmus, akkor $\varphi(H) \lhd \varphi(G)$.
g) Tetszőleges $\varphi : G \to K$ homomorfizmusra $n \mid |G|$ esetén $n \mid |\varphi(G)|$.
h) Tetszőleges $\varphi : G \to K$ homomorfizmusra $|G| < \infty$ és $n \mid |\varphi(G)|$ esetén $n \mid |G|$.

3. Legyen $N \lhd G$ egy 2 rendű normálosztó (azaz $|N| = 2$). Mutasd meg, hogy $gn = ng$ minden $g \in G$-re és $n \in N$-re!

4. Mutasd meg, hogy ha $N \lhd G$, és $|G : N|$ páros, akkor van olyan H, amelyre $N \leq H \leq G$ és $|H : N| = 2$.

5. Legyen $\varphi : G \to H$ and $\psi : G \to K$ homomorfizmusok, úgy hogy φ szürjektív. Mutasd meg, hogy pontosan akkor létezik olyan $\alpha : H \to K$ homomorfizmus, melyre $\psi = \alpha \circ \varphi$, amikor $\mathrm{Ker}(\varphi) \leq \mathrm{Ker}(\psi)$!

6. * Legyen G egy páratlan rendű csoport és $g \in G - \{e\}$. Mutasd meg, hogy g és g^{-1} nem konjugáltak!

7. * Legyen G egy csoport, $H \lhd G$ egy véges ciklikus normálosztó és $K \leq H$. Bizonyítsd be, hogy ekkor $K \lhd G$! Igaz-e hogy ha $H \lhd G$ és $K \lhd H$, akkor $K \lhd G$?

---

8. A Lagrange-tételt felhasználva mutasd meg, hogy
a) $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ minden p prímre és $a \in \mathbb{Z}$, $(a, p) = 1$-re (kis Fermat-tétel),
b) $a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ n)$ minden $a, n \in \mathbb{N}, (a, n) = 1$-re (Euler-tétel).

9. Mutasd meg, hogy ha G egy n elemű csoport és $m \in \mathbb{N}$, melyre $(n, m) = 1$, akkor
a) $g^m = e \Longrightarrow g = e$,
b) Minden $g \in G$-re az $x^m = g$ egyenletnek egy megoldása van G-ben!

10. * Legyen G egy n rendű csoport. Mutasd meg, hogy ha p az n egy prímosztója, akkor van G-ben p rendű elem! Igaz-e ez tetszőleges $d|n$-re?

A feladatsorok elérhetők a honlapomon: `www.math.bme.hu/~merdelyi/alg1/`