**Algebra 1.** **4. feladatsor** **2023.09.27.**

**Faktorcsoportok és a permutációcsoport**

1. Mik $Q$ (a kvaterniócsoport) faktorcsoportjai? Oldd meg újra a II/13c) feladatot!

2. Legyen $G = (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^*$, $N_1 = \{1, 15\}$ és $N_2 = \{1, 9\} \lhd G$. Ciklikusak-e a $G/N_1$ és $G/N_2$ faktorcsoportok?

3. a) Lásd be, hogy ha $N \lhd G$ és $H \leq G$ úgy, hogy $H \cap N = \{e\}$ és $HN = G$, akkor $G/N \simeq H$!
   b) Adott $G$ csoporthoz és $N \lhd G$-hez létezik-e mindig ilyen $H$?

4. Határozd meg a következő normálosztókkal vett faktorcsoportokat! Lehet-e a mellékosztályokból olyan reprezentánsrendszert kiválasztani, amelyek részcsoportot alkotnak $G$-ben?
   a) $G = \mathrm{GL}_n(K)$, $N = \mathrm{SL}_n(K)$ ($K$ egy tetszőleges test),
   b) $G = D_4$, $N = \langle f^2 \rangle$,
   c) $G = (\mathbb{R}, +)$, $N = \mathbb{Z}$ és
   d) $G = \mathbb{Q}^*, N = \{\pm 1\}$.

5. Hány kompozíciólánca van a $D_4$ diédercsoportnak, és mivel izomorfak a kompozíciófaktorok?

6. Add meg az $\mathbb{F}_3$ véges test fölötti $2 \times 2$-es invertálható felső háromszögmátrixok csoportjának egy kompozícióláncát! Mik a csoport kompozíciófaktorai?

---

7. Legyen $\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ és $\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$. Micsoda $\pi_1^2$, $\pi_2^2$, $\pi_1 \cdot \pi_2$ and $\pi_2 \cdot \pi_1$? Határozd meg a kapott permutációk ciklusfelbontását!

8. Mi az inverziószáma az előbbi $\pi_1$-nek és $\pi_2$-nek? Írd fel őket transzpozíciók és egyszerű transzpozíciók minimális szorzataként!

9. Az 7. feladatban szereplő permutációk közül melyik eleme $A_5$-nek? Felírhatók 3-ciklusok szorzataként?

10. a) Legyen $\alpha = (123)(46)$, $\beta = (12)(34)$ és $\gamma = (12345) \in S_6$. Micsoda $\alpha^{-1}\beta\alpha$, $\beta^{-1}\gamma\beta$ és $\gamma\alpha\gamma^{-1}$?
    b) Mik az $S_n$ csoport konjugált osztályai?

11. * Melyik az $S_n$ csoport legnagyobb konjugált osztálya?

A feladatsorok elérhetők a honlapomon: `www.math.bme.hu/~merdelyi/alg1/`