Algebra 1. **5. feladatsor** **2023.10.04.**

Direkt szorzat

1. Legyen $T = \langle t\rangle = \{e, t\}$ és $F = \langle f\rangle = \{e, f, f^2\} \leq D_3$. Igaz-e, hogy $D_3 \simeq T \times F$?

2. Mondd ki a Kínai maradéktételt és fogalmazd át ciklikus csoportok direkt szorzatára vonatkozó állításként!

3. Legyen $M, N \lhd G$, és $(|M|, |N|) = 1$. Bizonyítsd be, hogy ekkor $MN = M \times N$.

4. a) Mutasd meg, hogy ha $G = A \times B$ direkt szorzat, és $a \in A, b \in B$, akkor $o(ab) = [o(a), o(b)]$, feltéve, hogy a és b véges rendűek.
   b) Adj példát arra, hogy általában nem igaz ez az összefüggés egy csoport két eleme szorzatának a rendjére még akkor sem, ha $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \{e\}$.

5. Milyen rendű elemből hány van a következő csoportokban?
   a) $Z_6 \times Z_8$ b) $D_6 \times Z_3$ c) $Z_2 \times Z_2 \times Z_8$

6. Mutasd meg, hogy $\mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \simeq Z_2 \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$! Itt $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ az ortogonális mátrixok csoportja (azaz $(\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} | A^T A = I\}, \cdot)$) és $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ az 1 determinánsúak részcsoportja.

7. * Konstruálj egy epimofizmust S_4-ből S_3-ba!

A feladatsorok elérhetők a honlapomon: `www.math.bme.hu/~merdelyi/alg1/`