Algebra 1. **6. feladatsor** **2023.10.11.**

Abel csoportok struktúrája és néhány speciális részcsoport

1. Izomorfia erejéig hány 12 rendű Abel csoport létezik? És hány 100 rendű?
2. * Mutasd meg, hogy 5 nem-izomorf 8 rendű csoport van!
(Itt a csoportok lehetnek nem-kommutatívak!)
3. Mik az alábbi csoportok konjugált osztályai? Írd fel az osztályegyenletet!
a) Q (kvaterniócsoport) b) D_4 (diédercsoport)
4. Mi az (12) elem centralizátora S_n-ben?
5. Mi az (12) és (13) által generált részcsoport centralizátora és normalizátora S_n-ben?
6. * Mennyi $\max(o(\sigma)|\sigma \in S_n)$ az $n = 3, 4, 5, 6, 10, 11$ és 12 értékekre? És $n = 100$-ra?
7. Mi D_n' és $Z(D_n)$ (azaz a diédercsoport kommutátor részcsoportja és centruma)?
8. Mutasd meg, hogy $H \subseteq C_G(C_G(H))$ minden G csoportra és $H \subseteq G$ részhalmazra. Bizonyítsd be, hogy $H \subseteq C_G(H) \iff$ a H által generált részcsoport Abel!
9. * Mutasd meg, hogy ha $|G'| = 2$ egy véges G csoportban, akkor $|G : G'|$ páros!

A feladatsorok elérhetők a honlapomon: `www.math.bme.hu/~merdelyi/alg1/`

Algebra 1. **Mintazh** **2023.10.11.**

Csoportelmélet

A feladatok **nem** nehézségi sorrendben vannak, mindegyik 10 pontot ér.

1. Tekintsük a $G = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$ halmazt az $x \star y = xy - x - y + 2$ művelettel. Csoport-e $(G, \star)$?
2. Az $n \in \mathbb{N}$ mely értékeire homomorfizmus a $\varphi_n : D_{2022} \to D_{2022}, x \mapsto x^n$ leképezés? (D_n a $2n$ elemű diédercsoport).
3. Legyen G egy csoport, p egy prímszám és $H \leq G$ egy p indexű részcsoport úgy, hogy $Z(G) \nsubseteq H$ (G centruma nincs benne H-ban). Mutasd meg, hogy $H \lhd G$ (H normálosztó G-ben)!
4. Nevezzünk egy csoport g elemét négyzetnek, ha van olyan g', melyre $g = g'^2$ és a csoportot négyzetekkel teljesnek, ha minden eleme négyzet. Legyen G egy Abel-csoport és $H \lhd G$. Mutasd meg, hogy ha H és G/H is négyzetekkel teljes, akkor G is!
5. Legyen G egy csoport úgy, hogy $Z_8 \times G$ rendje 128 (Z_8 a 8 rendű ciklikus csoport). Mutasd meg, hogy G-ben nincs 3 rendű elem!
6. Legyen $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ és $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$. ($S_6$ a szimmetrikus csoport).
   Mi a $\gamma = \alpha\beta$ ciklusfelbontása és inverziószáma? Bontsd fel γ-t transzpozíciók szorzatára!
7. Mi az $\{i, j\} \subset Q$ normalizátora? (Q a kvaterniócsoport).

90 percig lehet dolgozni a feladatokon, a zh 20 ponttól sikeres. Jegyzet, könyv, stb nem használható!
Jó munkát!