Algebra 1. **7. feladatsor** **2023.10.25.**

Feloldható csoportok, Sylow részcsoportok és szabad csoportok

1. Számold ki az alábbi csoportok kommutátorláncát!
   a) Z_n, b) S_4 és c) S_5.

2. Mutasd megy, hogy egy 200 rendű csoportnak van 5-Sylow-normálosztója!

3. Legyen G egy 91 rendű csoport. Mutasd meg, hogy G ciklikus!

4. Mutasd meg, hogy egy 168 rendű egyszerű csoportban (ilyen van) pontosan 48 darab 7 rendű elem van.

5. Bizonyítsd be, hogy nincs 104, 176, 182, 56 és 80 rendű egyszerű csoport!

6. * Legyen G egy véges csoport, aminek pontosan 7 darab 27 elemű 3-Sylow-részcsoportja van. Mutasd meg, hogy G nem lehet egyszerű!

7. a) Bizonyítsd be, hogy az x, y elemek által generált szabad csoportot az x, xy halmaz is szabadon generálja.
   b) Bizonyítsd be, hogy ugyanebben a csoportban az $S = \{x, y^{-1}xy, y^{-2}xy^2\}$ halmaz szabadon generálja az $\langle S\rangle$ részcsoportot!

8. Bizonyítsd be a következő izomorfiákat a relációkkal megadott csoportokra:
   a) $\langle x, y | x^4 = y^4 = e, x^2 = y^2, xyx = y\rangle \sim Q$,
   b) $\langle x, y, z | x^2 = y^2 = z^3 = 1, xy = yx, z^{-1}xz = y, z^{-1}yz = xy\rangle \sim A_4$,
   c) $\langle x, y | x^2 = y^2 = 1, xyxy = yxyx\rangle \sim D_4$ és
   d) $\langle x, y | x^2 = y^2 = 1\rangle$ minden véges nem kommutatív homomorf képe izomorf egy diédercsoporttal.

9. * Bizonyítsd be, hogy $\langle x, y, z | y^{-1}xy = x^2, z^{-1}yz = y^2, x^{-1}zx = z^2\rangle = \{e\}$.

A feladatsorok elérhetők a honlapomon: `www.math.bme.hu/~merdelyi/alg1/`