Algebra 1. **9. feladatsor** **2023.11.15.**

Véges testek és UFD-k

1. Legyen R egy integritási tartomány és $b, c \in R$. Mutasd meg, hogy
   a) $(b)(c) := \{x \cdot y | x \in (b), y \in (c)\} = (bc)$ és
   b) $(b) + (c) := \{x + y | x \in (b), y \in (c)\} = (b, c)$!
2. Legyen $\mathbb{F}$ test. Mutasd meg, hogy az $\mathbb{F}^{n \times n}$ gyűrű (az $n \times n$-es $\mathbb{F}$ feletti mátrixok a szokásos műveletekkel) egyszerű (azaz csak triviális kétoldali ideáljai vannak: $\{0\}$ és $\mathbb{F}^{n \times n}$)!
3. Mutasd meg, hogy ha R integritási tartomány, akkor $p \in R$ prím $\iff$ $R/(p)$-ben nincs nullosztó!
4. Bizonyítsd be, hogy minden véges integritási tartomány test.

5. Mutasd meg, hogy $\mathbb{F}_8 = \mathbb{Z}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ test. Mik az $\mathbb{F}_8^* = (\mathbb{F}_8 \setminus \{0\}, \cdot)$ csoport generátorelemei? Hasonlóan lásd be, hogy $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}_3[x]/(x^2 + 1)$ test és határozd meg $\mathbb{F}_9^*$ generátorelemeit!
6. Tekintsük a páros számok (nem egységelemes) gyűrűjét. Mik a prímek és az irreducibilisek? Mutasd meg, hogy ez a gyűrű nem UFD!
7. Ellenőrizd, hogy $(6\sqrt{2} - 7)(3 + \sqrt{2}) = (3 + 4\sqrt{2})(5 - 3\sqrt{2})$ és ezek mind irreducibilisek $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-nen! ($N(rs) = N(r)N(s)$, ahol $N(a+b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$ a norma). Be lehet látni, hogy $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ UFD. Hogyan lehetséges ez?
8. Ellenőrizd, hogy $6 = 2 \cdot 3 = (1 - \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$ két nem-ekvivalens faktorizáció $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$-ben, és ezért $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nem UFD. Mutasd meg, hogy a felbontásokban szereplő elemek által generált főideálok nem maximálisak. Mik az ezeket tartalmazó maximális ideálok?
9. * Tekintsük az algebrai egészek $\overline{\mathbb{Z}}$ halmazát (azon komplex számok halmazát, amelyek előállnak egy egy főegyütthatós $\mathbb{Z}[x]$-beli polinom gyökeként)!
   a) Mit kell ellenőrizni, hogy lássuk, hogy $(\overline{\mathbb{Z}}, +, \cdot)$ gyűrű a szokásos műveletekkel?
   b) Mutasd meg, hogy $\overline{\mathbb{Z}}$-ben minden irreducibilis prím, de a gyűrű nem UFD!

A feladatsorok elérhetők a honlapomon: `www.math.bme.hu/~merdelyi/alg1/`