Algebra 1. **10. feladatsor** **2023.11.22.**

Ideálláncok

1. Mutasd meg, hogy az alábbi ideálok nem főideálok:
   a) $(x, y) \lhd \mathbb{F}[x, y]$ tetszőleges $\mathbb{F}$ testre,
   b) $(2, x) \lhd \mathbb{Z}[x]$.

2. * Van-e olyan ideál $\mathbb{Z}[x]$-ben, ami nem generálható 1000 elemmel?

3. Mik a $\mathbb{Z}/(6)$ gyűrű prímideáljai?

4. Legyen $\mathbb{F}$ test. Mik $\mathbb{F}[x]$ maximális ideáljai?

5. Mutasd meg, hogy
   a) $\mathbb{Z}$ nem Artin gyűrű (tehát van végtelen csökkenő ideállánca), de Noether gyűrű (nincs ilyen növekvőben).
   b) $\overline{\mathbb{Z}}$ nem Noether. Itt $\mathbb{Z}$ az algebrai egészek gyűrűje (ld IX/9 feladat).

6. Legyen R egy nullosztómentes egységelemes gyűrű, melyben nincs bal ideáloknak végtelen csökkenő lánca. Mutasd meg, hogy R ferdetest!

7. * Mutasd meg, hogy $\mathbb{Z}[i]$ euklideszi, de $\mathbb{Z}[\sqrt{5}i]$ nem euklideszi!

A feladatsorok elérhetők a honlapomon: `www.math.bme.hu/~merdelyi/alg1/`

Algebra 1. **Mintazh** **2023.11.22.**

Gyűrűelmélet

A feladatok **nem** nehézségi sorrendben vannak, mindegyik 10 pontot ér.

1. Mutasd meg, hogy nincs $675 = 3^3 \cdot 5^2$ rendű egyszerű csoport!
2. Mutasd meg, hogy $\langle x, y | x^2 = y^2 = e, xyx = yxy \rangle \simeq S_3$!
3. Legyen $M_2(\mathbb{R})$ a 2×2-es valós mátrix gyűrűje és $D = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} \subset M_2(\mathbb{R})$. Ideál-e és részgyűrű-e D?
4. Invertálható-e $2x + 1 + (x^2 - 3x + 1)$ az $\mathbb{R}[x]/(x^2 - 3x + 1)$ gyűrűben? Ha igen, mi az inverze?
5. Tekintsük a $\sqrt{-13}, 2 + 3\sqrt{-13}, 11, 17$ elemeket a $\mathbb{Z}[\sqrt{-13}]$ gyűrűben. Melyek irreducibilisek?
6. Mutasd meg, hogy a $2\mathbb{Z}$ és a $3\mathbb{Z}$ (egységelem nélküli) gyűrűk nem izomorfak!
7. Mutasd meg, hogy egy főideálgyűrűben minden prímideál maximális!

90 percig lehet dolgozni a feladatokon, a zh 20 ponttól sikeres. Jegyzet, könyv, stb nem használható!
Jó munkát!