

1. Egy kieséses pingpong bajnokságot rendezünk 1000 indulóval. Egy adott fordulóban, ha valakinek nem jut ellenfél, automatikusan továbbjut. Hány meccs lesz, mielőtt győztest hirdethetünk?
2. Legyen $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$. Bizonyítsd be, hogy ha kiválasztunk 6 különböző elemet, akkor biztosan lesz 2, aminek 10 az összege!
3. Egy $n > 1$ fős társaságban valahány ember kezet fog egymással, de két ember legfeljebb csak egyszer.
 - a) Bizonyítsd be, hogy mindig lesz közöttük kettő, akik ugyanannyiszor fogtak kezet.
 - b) Mi van akkor, ha két ember többször is kezet foghat egymással?
4.
 - a) Fogalmazzuk meg a skatulya-elvet!
 - b) Keresz olyan bizonyításokat (bármelyik előadásról), ami a skatulya elvet használja!
5. Adott 20 különböző pozitív egész szám, mindegyik kisebb 70-nél. Mutasd meg, hogy a 20 szám páronként vett különbségei között van 4 egyenlő!
6. Egy 100×100 -as táblázat minden mezőjébe beírtuk az 1, 2, 3 számok valamelyikét, és kiszámítjuk soronként, oszloponként és az átlókban is az ott lévő 100 szám összegét.
 - a) Bizonyítsd be, hogy kapunk két azonos összeget.
 - b) * Mi a helyzet, ha csak a sor- és oszlopösszegeket nézzük?
7. Mutasd meg, hogy ha $x_1, x_2, \dots, x_n$ valós számok, akkor van legalább egy, amelyik legalább akkora, mint az átlaguk, azaz létezik i , melyre

$$x_i \geq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

8. Mutasd meg, hogy ha n elég nagy, akkor $2^n > n^2$!
9. Véget ért András, Bence, Csilla, Dániel és Erzsébet körmérkőzéses pingpong versenye. Szüleik azonban – mivel nem utaztak le a nagy vetélkedő színterére – kiérdemelték gyermekeik jogos haragját. Ezért a gyerekek megállapodtak abban, hogy mindegyikük csak féligazságot ír majd haza levélben, azaz pontosan egy igaz, és egy hamis hírt. Ezeket írták a versenyről:
 - András: Csilla a versenyen második lett. Sajnos én csak harmadik lettem.
 - Bence: Örömmel írom, hogy első lettem. Erzsébet pedig a második.
 - Csilla: Második lettem, Dániel lecsúszott a negyedik helyre.
 - Dániel: A negyedik helyen kötöttem ki. De jó Andrásnak, ő lett az első.
 - Erzsébet: Harmadik lettem, szegény Bencének csak az utolsó hely jutott.

Állítsd össze a helyezési listát!

10. Mutasd meg, hogy ha $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ egy egyszerű gráf fokszámai, akkor $\sum_{i=1}^n d_i$ páros és minden $1 \leq k \leq n$ -re

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(d_i, k).$$

Megjegyzés: Ez elégséges feltétel is, ha van egy ilyen fokszámsorozatunk, akkor van olyan gráf, aminek ezek a fokszámai, ez az Erdős-Gallai tétel.

- HF1 A síkon 11 egyenest rajzoltunk meg, párhuzamos nincs közöttük. Bizonyítsd be, hogy kiválasztható kettő, amelyek 17° -nál kisebb szöget zárnak be!
- HF2 Legyen A egy n elemű halmaz és B az A halmaz néhány olyan részhalmazának halmaza, melyre ha $X, Y \in B$, akkor $X \cap Y \neq \emptyset$. Mutasd meg, hogy ekkor $|B| \leq 2^{n-1}$. Lehet-e egyenlőség?
- HF3 * Legyen n pozitív egész és válasszunk ki tetszőleges módon $n+1$ darabot az $1, 2, \dots, 2n$ számokból. Mutasd meg, hogy mindig van a kiválasztott számok között két olyan, hogy az egyik osztja a másikat!