

1. a) Fogalmazzuk meg a teljes indukció bizonyítási sémáját!
b) Keresd olyan bizonyításokat (bármelyik előadásról), ami teljes indukciót használ!
2. Mutasd meg, hogy

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n-k}{k} = f_{n+1},$$

ahol f_n az n . Fibonacci-szám.

3. Mutasd meg, hogy

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

4. Egy kör néhány szelője a körlemez tartományokra bontja. Igaz-e, hogy a tartományok mindig kiszínezhetők két színnel úgy, hogy minden tartomány egyszínű, és bármely két tartomány, amelynek van közös határszakasza, különböző színű?
5. Mennyi az első n köbszám összege?

6. Hol a hiba?

Bebizonyítjuk, hogy minden egész szám egyenlő. Ehhez megmutatjuk, hogy minden egész szám egyenlő a rákövetkező egész számmal. Tegyük fel, hogy az állítás igaz az n egész számra, azaz $n = n + 1$. Adjunk 1-et az egyenlet mindkét oldalához, ekkor azt kapjuk, hogy $n + 1 = n + 2$, tehát ez a tulajdonság öröklődik.

7. Hol a hiba?

Bebizonyítjuk, hogy a sík minden pontja egy egyenesen van. Ehhez megmutatjuk, hogy véges sok pont a síkon mindig egy egyenesen van. Az állítás $n = 1$ és $n = 2$ pont esetén igaz, hiszen bármely egy vagy két pont egy egyenesen van. Tegyük fel, hogy bármely n pont egy egyenesen van. Bizonyítjuk, hogy ekkor bármely $n + 1$ pont is egy egyenesen van. Ha ugyanis nem volna, az azt jelentené, hogy van a síkon n olyan pont, amelyik egy egyenesen van és egy $(n + 1)$. pont, amelyik nincs ezen az egyenesen. Ekkor elhagyva az egyenesen lévő n pont valamelyikét, a maradék n pont nem lenne egy egyenesen, ez pedig ellentmond az indukciós feltevésnek.

8. Mutasd meg, hogy a teljes indukció ekvivalens a természetes számok jólrendezettségével!

9. Mutasd meg, hogy az alábbi n gyökjeles kifejezésre teljesül, hogy

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}} = 2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

10. Bizonyítsd be, hogy ha n elég nagy, akkor

$$n^5 > 750n^4 + 4554n^3 + 512n^2 + 3641n + 141.$$

11. Mutasd meg, hogy ha $n > 1$, akkor

$$\sqrt{n} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

HF1 Mutasd meg, hogy az alábbi n tagú összegre teljesül, hogy

$$3 + 33 + 333 + \cdots + 333 \dots 3 = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}.$$

HF2 Egy országban úgy építenek autópályákat, hogy mindegyik autópálya egyenes, egyik kereszteződésben sem találkozik kettőnél több út és minden kereszteződésben az egyik út a másik fölött halad. Mutasd meg, hogy bármely ilyen úthálózatban elérhető az, hogy minden úton felváltva alul majd felül haladjunk a keresztezésekben!

HF3 Mutasd meg, hogy minden $m, n \in \mathbb{N}$ -re $f_{m+n+1} = f_m f_n + f_{m-1} f_{n-1}$.