

1. A matematika módszerei kurzusom hivatalos létszáma 28 fő, a Bevezetés az algebrába 1-é pedig 25. 9 hallgató mindkét kurzust felvette. Hány diákot tanítok a neptun szerint?
2. Egy iskola 12. évfolyamára 145 diák jár. A három legnépszerűbb sport a foci, az úszás és a kézilabda. 68 diák focizik, 71-en úsznak, és 54-en kézilabdáznak. 30 diák focizik és úszik, 16 focizik és kézilabdázik, és 24 úszik és kézilabdázik. Összesen 3-an űzik mindhárom sportot. Hány olyan diák van, aki ezek közül egyik sportot sem választotta?
3. a) Bizonyítsd be a szita formulát: ha $A_1, A_2, \dots, A_n$ véges halmazok, akkor

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|J|+1} \left| \bigcap_{j \in J} A_j \right| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n+1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|.$$

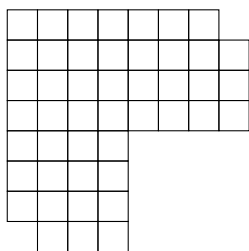
b) Keress olyan bizonyításokat (bármelyik előadásról), amik a szita formulát használják!

4. A szita formula segítségével számold ki $\varphi(pqr)$ -t, ahol p, q, r különböző prímek és φ az Euler-függvény!
5. Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész van, melynek a legkisebb prímosztója nagyobb 10-nél?
6. A szita formula segítségével számold ki az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz olyan bijekcióinak a számát, melyeknek nincs fix-pontjuk (azaz olyan i , melyre $f(i) = i$)! Adj képletet ugyanerre az n elemű halmaznál!
7. Egy térképen van n sziget, köztük repülőjáratok, mindkét irányba. Szervezd meg a járatokat a szigetek között úgy, hogy minden szigetről mindenhová el lehessen jutni, akár több átszállással. Hány járat kell legalább?
8. A térképen most n sziget szerepel, továbbá bármely két sziget között van repülőjárat, de sajnos csak az egyik irányba szállítanak utasokat. Bizonyítsd be, hogy mindig van olyan sziget, ahonnan legfeljebb egy átszállással bármely szigetre eljuthatunk.
9. Mutasd meg, hogy ha egy egyszerű gráfban a legnagyobb fokszám Δ , akkor a gráf csúcsai kiszínezhetők $\Delta + 1$ színnel úgy, hogy bármely két szomszédos csúcs különböző színű legyen!
10. Egy távoli szigeten élő törzs néhány számot különleges, varázserővel bíró „bűvös” számnak tart. Az antropológusok, akik megfigyelték őket, felfedezték a szabályokat, amelyek alapján a számok bűvösnek tekinthetők. Az ősi bűvös számok a következők: 1, 7, 16, továbbá:
 - (a) Ha x és y bűvös, akkor xy is bűvös lesz.
 - (b) Ha x és y bűvös, akkor a $2x - y$ is bűvös lesz.
 - (c) Minden további bűvös szám csak a fentiek alapján származtatható.

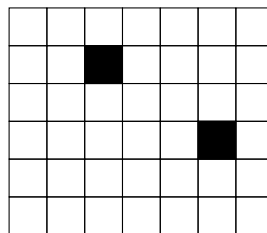
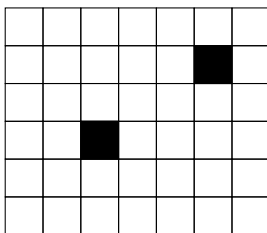
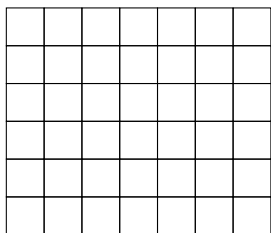
A vének tanácsa két számról szeretné eldönteni, hogy bűvösek-e: 123456 és 1234567. Hogyan lehet eldönteni?

- HF1 Hány olyan pozitív egész szám van, ami legfeljebb 10^{30} és se nem négyzetszám, se nem köbszám se nem ötödik hatvány?
- HF2 Egy térképen van n sziget, köztük repülőjáratok, mindkét irányba. Legfeljebb hány járat lehet, ha nem lehet mindenhonnet mindenhova eljutni?
- HF3 * Egy osztályba n ember jár, karácsonyra ajándékozást szerveznek úgy, hogy mindenki nevét felírják egy cetlire és húznak. Annak a valószínűsége, hogy a húzás jól sikerül (tehát senki se magát húzza) P_n . Mennyi $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$?

1. Egy $1 \times n$ -es táblát szeretnénk lefedni 1×1 és 1×2 -es dominókkal. Jelölje T_n , hogy ezt hányféleképpen tudjuk megtenni. Például $T_2 = 2$.
- a) Írj fel egy rekurzív formulát T_n -re, és indokold meg!
- b) Mennyi T_{10} ?
2. Az alábbi 46 mezőjű közel L -alakú táblát szeretnénk lefedni 1×2 -es dominókkal. Adj konstrukciót, vagy bizonyítsd be, hogy nem lehetséges!



3. Az alábbi 6×7 -es táblákon hányféle képpen lehet a bal felső mezőből a jobb alsó mezőbe eljutni a fekete mezőket elkerülve, ha csak egyesével, jobbra és lefele léphetünk? Válaszaidat indokold.



4. Az alábbi méretű táblákban szeretnénk egyes mezőkbe X -et írni, de úgy, hogy minden sorban és oszlopban páratlan számú X legyen. Egy mezőbe legfeljebb egy X -et írhatunk. Minden estre és minden $n \geq 1$ -re adj konstrukciót, vagy indokold meg, hogy miért nem lehetséges.
- a) $n \times n$
- b) $n \times (n + 1)$
- c) $n \times 2n$
5. Adott 20 különböző pozitív egész szám, mindegyik kisebb 70-nél. Mutasd meg, hogy a 20 szám páronként vett különbségei között van 4 egyenlő!
6. Mutasd meg, hogy minden n pozitív egészre $\sum_{i=1}^n f_i^2 = f_n f_{n+1}$, ahol f_n az n . Fibonacci szám ($f_1 = f_2 = 1$ és $n > 2$ -re $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$)!
7. Egy térképen van néhány sziget, köztük repülőjáratok, minden szigetről legfeljebb 2, mindkét irányba. Legfeljebb hány sziget lehet, ha mindenhonnet mindenhova legfeljebb n átszállással el lehet jutni?