

1. Legyen $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza, $\mathbb{P}$ a prímek halmaza és $\mathbb{R}$ a valósak halmaza. Igazak-e az alábbi állítások? Mi a (formális) tagadásuk?

- a) $\forall n \in \mathbb{N} \exists p \in \mathbb{P} p | n^2 - 1$,
- b) $\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} x^2 + \frac{1}{x^2} > K$,
- c) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x^y \leq y$
- d) $\forall n \in \mathbb{N} 7 \nmid n \implies 7 | n^6 - 1$
- e) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \in \mathbb{N} \iff x^3 \in \mathbb{N}$

2. Formalizáld a következő tételeket:

- a) Pitagorasz-tétel,
- b) Mozgólépcső-tétel (monoton + korlátos sorozatok) és
- c) Euler-Fermat tétel.

Igaz-e a megfordításuk?

3. Adott a síkon 100 különböző pont. Van-e mindig olyan egyenes, amelynek mindkét oldalán pontosan 50-50 pont van?

4. 10 kalóz osztozkodik egy 100 aranyérméből álló zsákmányon (az érmék oszthatatlanok). Először a legidősebb kalóz tesz ajánlatot az érmék elosztásáról, majd az összes kalóz szavaz róla, az ajánlattevőt is beleértve. Ha a kalózok fele elfogadja az ajánlatot (elég a fele, nem kell több), akkor az aranyak javasolt kiosztása megtörténik. Ha kevesebb, mint a fele szavazza meg az ajánlatot, akkor az ajánlattevő kalózt ledobják a fedélzetről, és a következő legidősebb kalóz tesz ajánlatot, egészen addig, amíg már csak a egy kalóz marad..

A kalózok preferencia-sorrendje a következő: életbenmaradás, a saját zsákmányuk maximalizálása, a többi kalóz kiiktatása. Mi lesz az osztozkodás végeredménye, feltéve, hogy minden kalóz racionálisan, a fenti sorrendet figyelembevéve gondolkodik?

5. 100 békétlen zenész turnéra készül. Minden zenésznek legfeljebb 3 haragosa van a zenekarban (a haragosság kölcsönös). Két busszal utaznak a turnéra. Igaz-e, hogy szét lehet őket osztani a két buszra úgy, hogy mindenkinek legfeljebb egy haragosával kell egy buszon utaznia?

6. * Egy börtönben n rab tartózkodik. Az unatkozó börtönőrök azt találják ki, hogy az udvaron mindegyik rab fejére piros vagy kék sapkát tesznek úgy, hogy senki se lássa, a saját fejére milyen színű kerül. Miután a rabok jól megnézték egymást (minden rab a sajátján kívül az összes többi rab sapkáját látja), sorban meg kell tippeljük, hogy milyen színű sapka van a saját fejükön. Jó stratégiával legalább hányan tudják biztosan eltalálni a sapkájuk színét? (Mielőtt a sapkák a rabok fejére kerülnek, tarthatnak egy megbeszélést.)

- HF1 Legyen $\mathbb{N}$ a természetes számok halmaza, $\mathbb{P}$ a prímek halmaza és $\mathbb{R}$ a valósak halmaza. Igazak-e az alábbi állítások? Mi (formális) tagadásuk?

- a) $\forall p \in \mathbb{P} \exists n \in \mathbb{N} p > 3^{n+1}$,
- b) $\exists K \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} x^3 + \frac{1}{x^3} > K$,
- c) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x^y > y$
- d) $\forall n \in \mathbb{N} (2 | n - 1) \implies (8 | n^2 - 1)$
- e) $n \in \mathbb{P} \iff n^2 \notin \mathbb{P}$

- HF2 Két kalóz úgy tud igazságosan osztozni a zsákmányon, hogy az egyik elfelezi a zsákmányt, a másik pedig választ magának a két rész közül. Így mind a kettő tudja garantálni, hogy a neki jutott rész számára legalább zsákmány felét érje. Dolgozz ki módszert ami működik n kalózra! Tehát mindenki legalább a zsákmány számára $1/n$ -ed értékű részét meg tudja szerezni, még akkor is ha többi kalóz összejátszik ellene.

- HF3 * Hogyan változik a válasz a sapkás-rabos feladatban, ha nem hangosan kell tippelni, hanem mindenkinek le kell írnia egy lapra, hogy szerinte milyen sapka van a fején? (Tehát a későbbiek nem hallják az előző rabok tippjeit)