

1. A lovagok mindig igazat mondanak, lóköttők mindig hazudnak. Az alábbi feladatokban a lehető legtöbb szereplőről kell eldönteni, hogy lovag vagy lóköttő.

- B azt mondja, hogy A azt mondja, hogy A lóköttő.
- B azt mondja, hogy mindketten lóköttők.
- B azt mondja, hogy kettőjük közül az legalább az egyik lóköttő.

2. Az alábbi szabályok írják le az állításlogika következtetési szabályait:

$\wedge$ be:	$\frac{A_1 \quad A_2}{A_1 \wedge A_2}$	$\wedge$ ki:	$\frac{A_1 \wedge A_2}{A_i} \quad (i = 1, 2)$
$\vee$ be:	$\frac{A_i}{A_1 \vee A_2} \quad (i = 1, 2)$	$\vee$ ki:	$\begin{array}{cc} [A] & [B] \\ \vdots & \vdots \\ A \vee B & C \quad C \\ \hline & C \end{array}$ (esetszétválasztás)
$\rightarrow$ be:	$\begin{array}{c} [A] \\ \vdots \\ B \\ \hline A \rightarrow B \end{array}$	$\rightarrow$ ki:	$\frac{A \rightarrow B \quad A}{B}$
$\perp$: (ellentmondás elve)	$\frac{\perp}{A}$	$\neg\neg$: (kettős tagadás)	$\frac{\neg\neg A}{A}, \text{ ahol } \neg A = A \rightarrow \perp$

Vezesd le az alábbi következtetéseket!

- $A \wedge B \implies B \wedge A$
- $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \implies A \rightarrow C$
- $\neg(A \vee B) \implies \neg A \wedge \neg B$

3. Írd le az indirekt bizonyítás módszerét az állításlogika következtetési szabályainak segítségével!

4. Bizonyítsd be, hogy 6 ember között mindig van vagy 3 olyan, akik mind ismerik egymást, vagy 3 olyan, akik mind ismeretlenek egymásnak (az ismeretség kölcsönös)!

5. Legyen S a latin ABC és 0-9 számjegyekből alkotható véges sorozatok halmaza. Egy tömörítő függvény $f : S \rightarrow S$ minden sorozatot egy másik (ideális esetben) rövidebb sorozathoz rendel és semelyik két sorozaton nem rendeli ugyanahhoz a sorozathoz (azaz f injektív). Tudjuk hogy, $f("aaaaaaaaa") = "10a"$. Bizonyítsd be, hogy van olyan sorozat is, amit f egy hosszabb sorozathoz rendel!

6. n külsőleg egyforma súlyunk van, de az egyik kicsit nehezebb a többinél. Egy kétkarú mérleget használva hány mérés kell ahhoz, hogy biztosan megtaláljuk a nehezebb súlyt?

7. * Egy végtelen saktábla felének (tehát két cellát határoló egyenes egyik oldalán) minden mezőn egy bábu áll. A bábuk úgy mozoghatnak, hogy egy bábu átugrik egy szomszédos mezőn állót és az átugrott bábu lekerül a tábláról. Eljuthat-e valamelyik bábu a tábla (eredetileg üres) oldalán az (egyene stől számított) ötödik sorba?

HF1 Vezesd le az alábbi következtetéseket!

- $A \wedge (B \vee C) \implies (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
- $(A \vee B) \rightarrow C \implies (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$

HF2 Bizonyítsd be, hogy elég sok ember között mindig van vagy n olyan, akik mind ismerik egymást, vagy n olyan, akik mind ismeretlenek egymásnak (az ismeretség kölcsönös)!

HF3 n külsőleg egyforma súlyunk van, de az egyik súlya kicsit eltér a többiétől. Egy kétkarú mérleget használva hány mérés kell ahhoz, hogy biztosan megtaláljuk a különböző súlyt?

A feladatsorok elérhetők a honlapomon: www.math.bme.hu/~merdelyi/matmod/