Centrális Határeloszlás Tétel

1. Tétel: (CHT). *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$, FAE v.v., amelyekre $E\xi_i = m$, $D\xi_i = \sigma < \infty$. $(\sigma > 0)$. Akkor*

$$P\left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) \to \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y.$$

A CHT-t ebben az általános alakban a 2. félévben bizonyítjuk.

1. Definíció:. *Legyen a_n, b_n két számsorozat, $b_n \neq 0$.*

$$a_n = O(b_n) \quad \textit{jelentése:} \quad \sup_n \left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \infty,$$
$$a_n = o(b_n) \quad \textit{jelentése:} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

2. Definíció:. *Legyen $f(x)$, $g(x)$ két függvény, az x_0 pont valamely környezetében értelmezett, és ugyanott $g(x) \neq 0$.*

$f(x) = O(g(x))$ ($x = x_0$ környezetében) jelentése: alkalmas $\varepsilon > 0$-ra

$$\sup_{\substack{|x-x_0|<\varepsilon \\ x\neq x_0}} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \infty$$

$f(x) = o(g(x))$ ($x = x_0$ környezetében) jelentése:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

de Moivre–Laplace tétel

Legyenek $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, FAE v.v., $P\left(\varepsilon_i = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right) = \begin{cases} p \\ q = 1-p \end{cases}$ $(0 < p < 1)$. Mese:

$$P(\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n = k) = P\left(\frac{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n - np}{\sqrt{npq}} = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) \sim \varphi(x_k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} = \varphi(x_k)h$$

ahol $x_k = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $h = \dfrac{1}{\sqrt{npq}}$.

Stirling Formula

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, e^{\frac{1}{12n+1}} \le n! \le \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\, e^{\frac{1}{12n}}$$

Megjegyzés: korábbi bizonyításunkból csak annyi következett, hogy a formula igaz valamely $\tilde{\pi}$ konstanssal (π helyett). A $\tilde{\pi} = \pi$ egyenlőség a MLT következménye lesz.

Következmény:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\tilde{\pi} n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Jelölje $S_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$. S_n eloszlása $B(n,p)$, $ES_n = np$, $DS_n = \sqrt{npq}$. Továbbá: $x_k = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\delta_k = k - np = x_k\sqrt{npq}$. A Stirling-formula alkalmazásával

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \sim$$

$$\sim \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{np+\delta_k}{e}\right)^{np+\delta_k}\left(\frac{nq-\delta_k}{e}\right)^{nq-\delta_k}} p^{np+\delta_k} q^{nq-\delta_k} \frac{\sqrt{2\tilde{\pi} n}}{\sqrt{2\tilde{\pi}(np+\delta_k)2\tilde{\pi}(nq-\delta_k)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\pi} npq}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta_k}{np}\right)^{np+\delta_k}\left(1 - \frac{\delta_k}{nq}\right)^{nq-\delta_k}}$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\delta_k}{np}\right)\left(1 - \frac{\delta_k}{nq}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\pi} npq}} I \cdot II.$$

Használjuk:

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3) \qquad x \to 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + O(x) \qquad x \to 0$$

$$e^x = 1 + O(x) \qquad x \to 0.$$

Egyrészt
$$\log\left(\frac{1}{I}\right) = (np+\delta_k)\log\left(1+\frac{\delta_k}{np}\right) + (nq-\delta_k)\log\left(1-\frac{\delta_k}{nq}\right) = \frac{x_k^2}{2} + O\left(\frac{\delta_k^3}{n^2}\right).$$
Másrészt
$$II = 1 + O\left(\frac{\delta_k}{n}\right)$$
Tehát
$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\pi} npq}} e^{-\frac{x_k^2}{2}} \left[1 + O\left(\frac{\delta_k^3}{n^2}\right) + O\left(\frac{\delta_k}{n}\right)\right].$$
Amennyiben $|x_k| \le A_n$ (itt A_n majd tart a ∞-hez), akkor
$$P(S_n = k) = h\varphi(x_k)\left[1 + O\left(\frac{A^3}{\sqrt{n}}\right)\right]$$
ezért igaz a

2. Tétel: (de Moivre-Laplace). *Ha* $|x_k| \le A_n$*, és* $\frac{A_n}{n^{1/6}} \to 0$*, akkor*
$$\sup_{|x_k|\le A_n} \left|\frac{P(S_n = k)}{h\varphi(x_k)} - 1\right| = O\left(\frac{A_n^3}{\sqrt{n}}\right).$$
Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a fenti tétel igen finom eredmény: az egyébként 0-hoz tartó $P(S_n = k)$ valószínűség finom aszimptotikáját adja $n \to \infty$ esetén. Az ilyen finom állításokat lokális határeloszlástételeknek nevezzük: a normális eloszlás sűrűségfüggvényéhez való konvergenciáról van szó!

A Moivre–Laplace tétel felintegrálásával könnyen nyerhető a

3. Tétel: (de Moivre–Laplace tétel globális változata). *Fix* $\alpha < \beta$*-ra*
$$P\left(np + \alpha\sqrt{npq} < S_n < np + \beta\sqrt{npq}\right) \to \int_\alpha^\beta \frac{1}{\sqrt{2\tilde{\pi}}} e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y.$$
Mivel a jobboldalon sűrűségfüggvénynek kell szerepelnie, azért az is adódik, hogy $\tilde{\pi} = \pi$.

A felintegráláshoz jelöljük
$$\phi_n(x) = \sqrt{npq}\,P(S_n = [np + x\sqrt{npq}])$$
Egyrészt a Moivre-Laplace-tételből: $\phi_n(x) \to \phi(x)$, másrészt közvetlenül ellenőrizhető, hogy $\sup_{x,n} \phi_n(x) < \infty$. Így a kis Lebesgue-tételből a globális tétel már adódik.