Javaslat a „Matematika A1” tantárgy részletes gyakorlati tematikájára

Tóth Imre Péter

Matematika Intézet, Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2006 április

Bevezetés

Ebben a műben a BME mérnökoktatásában frissen bevezetett „Matematika A1 Analízis” nevű tárgy részletes *gyakorlati* tematikájára teszek javaslatot. Ezt a javaslatot elsősorban vitaanyagnak szánom, mivel úgy gondolom, a mérnökhallgatók matematikaoktatása megérett egy alapos, össznépi átgondolásra.

A matematika tárgyak tényleges tartalma hagyományosan nagyon erősen tanszékfüggő. Az elmúlt évtizedeket a megváltozott körülmények dacára döntően túléltek a régi tematikák. A megváltozott körülményeket – elsősorban a hallgatói létszám drámai emelkedését, és az ezzel járó elkerülhetetlen színvonalcsökkenést – leginkább csak a számonkérések szintje követte, az is csak részben. Az ú.n. Egységes Matematikaoktatás bevezetése ugyan papíron átjárhatóvá tette sok mérnök szak kurzusait, a gyakorlatban viszont a tárgyak logikai egymásra épülése csak tanszéken belül valósul meg (jó esetben).

A hallgatóság összetételének megváltozását az igények megváltozása is követte. Ma, úgy érzem, a hallgatóság sokkal kisebb részének van igénye (és szüksége) magas (vagy akár közepes) szintű absztrakcióra. Cserébe nagy az igény a már meglévő ismeretek rendszeres hivatkozására és frissítésére, rendzserbe foglalására: sok fejben nem áll össze magától a rendszer.

Az elmúlt évben az új „A1” tárgy meghírdetése egyrészt nagyon későn történt, másrészt nagyon korán. Későn, mert az utolsó utáni pillanatban egy új tematika és szabályrendszer bevezetésének nincs realitása. Másrészt nagyon korán, mert a hivatalos tananyagnak kinevezett „Thomas’ Calculus” könyv (Addison Wesley 2004) nem csak hogy nem létezett magyar fordításban, de nem is olvasta szinte senki. Az könyv tartalmával kapcsolatos problémák megoldását megelőzte a döntés.

Így az „A1” tárgy születését gyakorlatilag változás nélkül élték túl a régi „B1” tematikák. Sajnos egyelőre kimaradt a nagy lehetőség a szükséges változásokban való megegyezésre és ezek megvalósítására. Ennek ellenére úgy vélem, hogy az átgondolt változtatásra szükség van: többet ki lehetne hozni a helyzet adta lehetőségekből, mint amit ma kihozunk.

A tematika összeállításának szempontjai

Az új tematika összeállításánál legalább három fő szempontot figyelembe kell venni:

- a tárgy akkreditációjában lévő hivatalos tematikát
- a hivatalos tananyagként definiált Thomas könyv anyagát
- a rendszerben lévő igen nagy tehetetlenséget (vagy: lendületet).

Sajnos már ez a három szempont is páronként összeegyeztethetetlen, pedig jó lenne figyelembe venni további szempontokat is:

- a mérnök oktatók elvárásait
- a hallgatók felkészültségét
- az időkorlátot.

Az alábbiakban ezen hat szempont közötti néhány ellentmondást emelek ki, és javaslatot teszek a megkötendő kompromisszumra. **A javaslat hangsúlyozottan a gyakorlatok tematikájára vonatkozik**. Hogy az előadásokba mi egyéb férhet még bele, arra nincs rálátásom.

Referencia képpen álljon itt a tárgy hivatalos leírása:

```
 Sík- és térvektorok algebrája. Komplex számok. Számsorozatok.
Függvényhatárérték, nevezetes határértékek. Folytonosság.
Differenciálszámítás: Derivált, differenciálási szabályok.
Elemi függvények deriváltjai. Középértéktételek, L'Hospital
szabály. Taylor-tétel. Függvényvizsgálat: lokális és
globális szélsőértékek. Integrálszámítás: Riemann integrál
és tulajdonságai, Newton-Leibniz formula, primitív függvény
meghatározása, parciális és helyettesítéses integrálás.
Speciális integrálok kiszámítása. Improprius integrál. Az
integrálszámítás alkalmazásai.
```

Néhány kiemelt probléma

első probléma: sorozatok határértéke

A hivatalos tematikában – csakúgy, mint az oktatás hagyományaiban – előkelő helyen szerepelnek a számsorozatok és határértékük. Ezzel szemben a Thomas könyv sorozatokkal sokáig nem foglalkozik. Rögtön az elején *függvény*-határértéket tárgyal. A sorozat határértéke a függvény végtelenbeli határértékének speciális esete, és csak *jóval* később kerül elő, amikor a függvénysorokhoz kell.

Ebben a kérdésben üdvösnek tartom a Thomas féle megközelítést. A differenciál és integrálszámítást fel lehet építeni sorozatok nélkül, a legtöbb trükkös határértéket pedig majd a L'Hospital szabály lelövi. Gyakorlati szempontból egyáltalán nem baj, ha néhány függvény deriváltjának mibenlétét elhinni kényszerülünk – ez amúgy is elkerülhetetlen, hiszen pl. a cos és sin függvényről a következő félév elejéig (hatványsorok) nem fogjuk pontosan tudni, hogy micsoda.

Ennek megfelelően a javasolt gyakorlati tematikában sorozatok nem szerepelnek.

második probléma: transzcendens függvények

A Thomas könyv úgy csinálja végig a differenciál- és integrálszámítás felépítését, hogy közben exponenciális függvényről és logaritmusról nem esik szó. Az ln függvényt mint az $\frac{1}{x}$ integrálját definiálja, az e^x-et pedig mint ennek inverzét.

Mondanom sem kell, hogy ez teljesen összeegyeztethetetlen a magyar oktatás hagyományaival. Másfelől ezt a mérnökoktatásban teljesen felesleges absztrakciónak tartom, amikor rettentő indirekt módon vezetünk be valamit (a hatványozást), ami nagyon szemléletes. Véleményem szerint az e^x definíciójául egy félévre tökéletesen megfelel, hogy „A 2^x-ről mindenki tudja, hogy micsoda (vagy azt hiszi, hogy tudja), az e^x meg ugyanolyan, csak az e egy másik szám". Ezen felül az e^x elhalasztása a legfontosabb példától fosztja meg a differenciálszámítást: az ehhez való hozzászokást nem lehet elég korán kezdeni.

óriási hibának tartom, hogy magyarra fordításra nem a Thomas' Calculus „Early Transcendentals" változata került, ami éppen a fenti felismerés nyomán kezdettől beépíti a tárgyalásba a transzcendens függvényeket. Csak bizakodni tudok abban, hogy ez nem azért történt, mert a döntéshozók nem tudtak a másik változat létezéséről.

Mindezek alapján az e^x és társai az elejétől szerepelnek a javasolt gyakorlati tematikában.

harmadik probléma: szekáns és koszekáns

A Thomas könyv az angolszász hagyományoknak megfelelően intenzíven használja önálló függvényként a $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ és $\csc x = \frac{1}{\sin x}$ függvényeket, ezeket ugyanolyan természetességgel (sőt, előszeretettel) szerepelteti a képletekben, deriválja, integrálja, mint a szinuszt és koszinuszt. Ennek a szokásnak a megteremtését hazai pályán teljesen irreálisnak tartom: én magam egyéltalán nem tudok ezekkel a függvényekkel bánni, és ebből azt gondolom, hogy sok más oktató sem :) – a hozzánk kerülő hallgatókról nem is beszélve. Nem hiszem, hogy a dolog megérné a fáradságot – és főleg a gyakorlatból eltelő értékes perceket, így a javasolt gyakorlati tematikában szekáns és koszekáns nem szerepel.

negyedik probléma: komplex számok és térgeometria

Ez a két témakör teljesen kilóg a tematikából. Nem tudom, miért kerültek bele. Talán mert annyira sürgető a tárgyalásuk a mérnöki alkalmazások miatt, talán mert nem sikerült nekik más tárgyakban helyet találni. Mindenesetre itt a levegőben lógnak: mind komplexből, mind vektorokból csak algebrát van esély csinálni, analízist nincs. A Thomas könyvben ugyan mindkettő szerepel, de a térgeometria csak a többváltozós analízis előtt, a komplex számok pedig csak függelékben.

Azt gondolom, hogy mindkettőnek a második félévben lenne a helye: a komplex számoknak a hatványsorok és a Fourier-sorok között félúton, a térgeometriának pedig a lineáris algebra elején. (A vektoriális szorzat, ugye, determináns ...) Cserébe a hatványsorokat hoznám előre az első félévbe. Ekkora eltérést a hivatalos tematikától azonban javasolni se merek :(

Ennek megfelelően a javasolt gyakorlati tematikában mindkét témakörrel mostohán bánok: az utolsó két gyakorlatot kapták, aminek az anyaga alig számonkérhető. (Pontosabban: az anyag többi része kapta az előkelő helyeket.) Másfelől ez a két anyagrész bármikor bárhová áttehető, amikor az idő engedi.

ötödik probléma: paraméteres görbék

A hagyományok szerint a deriválás és integrálás alkalmazásainál venni szokás paraméteresen adott görbék merdekségét, ívhosszát, sőt a helyvektor által súrolt területet, stb. Véleményem szerint ezek az alkalmazások – bár kétségkívül egyváltozós függvények deriválását és integrálását igénylik – nem az egyváltozós analízis témakörébe tartoznak. A Thomas könyv sem itt tárgyalja őket, hanem közvetlenül a többváltozós analízis előtt, a lineáris algebrai bevezető után. Tapasztalatom szerint ezek az alkalmazások a hallgatók túlnyomó részénél a (meg nem értett) kész képletbe való behelyettesítés begyakorlását jelentik, és számonkérni is csak ezt tudjuk. Ezért azt javaslom: várjanak a paraméteres görbék akár a harmadik félévig is (a differenciálgeometriáig). Ha idő közben egy mérnök oktatónak mégis szüksége lenne ilyen alkalmazásra, hát ő is felírhatja a képletet bizonyítás nélkül.

Ennek szellemében a javasolt gyakorlati tematikában paraméteres görbék nem szerepelnek.

hatodik probléma: algebra, halmazelmélet, logika, stb

A hagyomány szerint az egyetemi matematika villámgyors ismétléssel kezdődik. Szerepelni szokott (tanszéktől függően) halmazalgebra, állítások tagadása, teljes indukció, polinomok osztása, számtani, mértani és harmonikus közép, binomiális együtthatók és binomiális tétel, rekurzívan definiált sorozatok monotonitása, és még sok minden érdekes dolog. Tapasztalatom szerint ezeknek az anyagrészeknek a hasznosulása rendkívül kicsi, ráadásul ezek döntő része az anyag felépítéséhez nélkülözhető. Természetesen egyikről sem állítom (szinte), hogy nem hasznos és nem érdekes. Azt viszont állítom, hogy a gyakorlatokon ezeknél sokkal fontosabb dolgokra kell az idő. Így a javasolt gyakorlati tematikából a felsoroltak mindegyike kimaradt. Véleményem szerint, ha az előadónak ezen ismeretek valamelyikére a logikus felépítéshez szüksége van, akkor beszéljen róla előadáson.

hetedik probléma: a hallgatók felkészültsége és az időkorlát

Az analízis nagyon sok, a középiskolában szerzett előismeretre épít. Sok hallgatónak ezek az előismeretei (enyhén szólva) hiányosak, így elkerülhetetlen néha az ismétlés. Teljesen reménytelen azonban minden szükséges ismeret átismétlése, ezért sokkal hasznosabbnak tartom a hallgatóknak nagyon világosan tudtára adni, hogy mire lesz szükség. Ehhez a tematikában egy nulladik gyakorlat helyetti „szükséges előismeretek” bekezdés szerepel. Ezen felül az első gyakorlat az általam egyedüli legfontosabbnak tartott függvényfogalomról, valamint fontos függvények tulajdonságairól szól. Ez már csak azért is kell, mert az első gyakorlatot sokszor nem előzi meg előadás, így az analízishez nem lehet hozzákezdeni.

A második gyakorlat viszont már határérték, és az időbeosztásnál az volt a cél, hogy az első ZH-n (kb. a hetedik héten) a deriválás az összes alkalmazásával számonkérhető legyen.

Az anyag 12 alkalomra van tervezve, tapasztalatom szerint max. ennyi gyakorlaton van realitása új anyagot venni.

Hangsúlyok

A javasolt tematika egyértelműen a **deriválás** és az **integrál** fogalmára, technikájára és alkalmazására teszi a hangsúlyt, bevallottan minden más ismeret rovására. Ezt jól tükrözi az időbeosztás: a deriválásra és integrálásra 4-4 gyakorlat jut, minden másra összesen 4.

A cél elsősorban a matematika és csak másodsorban az alkalmazás megtanítása, nem pedig fordítva. Mindez abból a meggyőződésből kiindulva, hogy a mérnökhallgató agyában egyik sem lehet meg a másik nélkül, de alkalmazást máshol is sokat lát majd, a matematikát pedig itt kell megtanulnia.

A feladatsorok

A tematikához írt minden kommentárnál beszédesebbek maguk a javasolt feladatsorok. Ezekben megpróbáltam az anyagnak azt a részét kiemelni, amiről szerintem a rövid gyakorlatoknak szólni kell. Természetesen erős szelekció mellett is sokkal több feladat került be, mint ami gyakorlaton reálisan tárgyalható – különösen a technikáról szóló gyakorlatoknál. Ezért a feladatsorokkal nem is azt akarom mutatni, hogy mi minden van bennük, hanem hogy mi minden *nincs*.

Egyelőre nem teszek javaslatot arra, hogy a felsorolt feladatokból melyik legyen az az alkalmanként legfeljebb 10, néhány témakörnél esetleg 15 részfeladat, ami gyakorlaton elhangozzék. Ám ha tárgyfelelős lennék, bizonyára megtenném.

Végül: a kísértésnek csak nem lehet ellenállni, így sok feladatsor végére bekerült néhány nehezebb, vagy az anyagon túlmutató feladat – csillaggal megjelölve – a jó hallgatók számára, abban a reményben, hogy továbbra is lesznek ilyenek.

Részletes tematika, gyakorlatok időbeosztása

0. szükséges előismeretek
   Függvény fogalma, ábrázolása. Trigonometrikus függvények, hatványozás és logaritmus azonosságai. Nevezetes függvények grafikonjai, függvénytranszformációk. Egyszerű algebrai, trigonometrikus, logaritmusos és hatványozásos egyenletek megoldása. Abszolút érték. Összegek $\sum$-s jelölése. Faktoriális.

1. gyakorlat: függvénytani alapok
   Függvény fogalma, értelmezési tartomány, értékkészlet, függvény ábrázolása, kiértékelése. Összetett függvény, inverz függvény. Nevezetes függvények grafikonjai. Exponenciális és hiperbolikus függvények.

2. gyakorlat: függvények határértéke
   Pontbeli és végtelenbeli határértékek intuitív fogalma, leolvasása grafikonról, meghatározása behelyettesítéssel. Határérték keresése definíció alapján. Egyszerű határértékszámítási szabályok; racionális törtfüggvény határértékei, gyöktelenítés módszere. Rendőr-elv. **e-hatványokra vezető határértékek nem.**

3. gyakorlat: folytonosság, differenciálhányados
   Folytonosság fogalma, folytonossá tétel. A folytonosság, mint a határátmenet és a függvény-kiértékelés felcserélhetősége. Differenciálhányados intuitív fogalma és definíciója, derivált keresése definíció alapján.

4. gyakorlat: a deriválás technikája
   Elemi függvények deriváltjai. Deriválási szabályok: összeg, szorzat, hányados, összetett függvény, inverz függvény deriválása. $f(x)^{g(x)}$ alakú hatványok deriválása. Implicit függvény deriváltja. Magasabb deriváltak. **Paraméteresen adott görbe deriváltja nem.**

5. gyakorlat: a deriválás alkalmazásai 1.
   Függvénygörbe érintője. Monotonitás, konvexitás. Függvény szélsőértéke, szöveges szélsőérték-feladatok. L'Hospital szabály, e-hatványra vezető határértékek. Newton módszer. Taylor polinom. Sebesség, gyorsulás, áramerősség, teljesítmény.

6. gyakorlat: a deriválás alkalmazásai 2.: függvényvizsgálat
   Szakadási helyek és határértékek keresése, monotonitás és szélsőértékek, konvexitás és inflexiók. Végcél a függvény ábrázolása és az értékkészlet leolvasása. **Ferde aszimptoták nem.**

7. gyakorlat: határozatlan integrál 1.
   Elemi integrálok. Függvények összegének, számszorosának integrálja. $f^\alpha f'$, $e^f f'$ típusú integrálok. Parciális integrálás. Parciális törtekre bontás legegyszerűbb esetei, racionális törtfüggvények integrálása. Trigonometrikus polinomok integrálása linearizálás után.

8. gyakorlat: határozatlan integrál 2 (helyettesítéses), határozott integrál
   Helyettesítéses integrálok. Határozott integrál geometriai jelentése. Newton-Leibniz formula. Parciális és helyettesítéses integrálás a határozott integrálokra (határok kezelése).

9. gyakorlat: integrál alkalmazásai
   Görbe alatti terület, függvénygörbe ívhossza, súlypontja. Forgásfelület felszíne, súlypontja, második momentuma (tehetetlenségi nyomaték). Forgástest térfogata, súlypontja. Forgatónyomaték. Munka. Átlagsebesség. **Paraméteres görbék nem.**

10. gyakorlat: közelítő integrál, improprius integrál
    Téglalap és trapéz módszer. Integrál közelítése a Taylor-polinom integrálásával. Monte Carlo módszer. Nevezetes improprius integrálok, létezés és nemlétezés. Diszkrét összeg közelítése integrállal.

11. gyakorlat: komplex számok
    Algebrai és trigonometrikus alak. Összeadás, szorzás, osztás, hatványozás, gyökvonás.

12. gyakorlat: koordinátageometria
    Skaláris szorzás, hosszúság, vektorok szöge. Egyenes paraméteres egyenlete és egyenletrendszere. Sík egyenlete, normálvektora. Vektoriális szorzás. Pontok, egyenesek, síkok távolsága.

1. függvénytani alapok

1. Legyen $f(x) = (x^2+1)^2 - x$, $g(x) = 1 - x$. Mennyi

   (a) $f(3)$
   (b) $f(0)$
   (c) $f(y)$
   (d) $f(g(x))$
   (e) $g(f(x+1))$
   (f) $g(g(x))$

2. Legyen $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}} + 1$.

   Mi f értelemzési tartománya és értékkészlete?

   Mennyi x, ha $f(x) = \frac{5}{4}$?

   Mennyi y, ha $f(y) = 1$?

   Adjuk meg az f függvény inverzét, f^{-1}-t!

   Mi f^{-1} értelmezési tartománya és értékkészlete?

3. Invertálhatók-e az alábbi függvények? Ha igen, mi az inverzük, illetve mi az inverz értelmezési tartománya és értékkészlete?

   (a) $f : [-2\ ,\ 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$
   (b) $f : [-2\ ,\ 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$
   (c) $f : [0\ ,\ 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$
   (d) $f : [-\infty\ ,\ \infty] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$
   (e) $f : [-\frac{\pi}{2}\ ,\ \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$

4. Ábrázoljuk az alábbi függvényeket!

   (a) x; x^2; x^3; $\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2}$; $\frac{1}{x^3}$; $\sqrt{x}$
   (b) $\sin x$; $\cos x$; $\tan x$
   (c) 2^x; 2^{-x}; $\left(\frac{1}{2}\right)^x$; $\log_2 x$

5. Legyen $e \approx 2,7182818285$ az Euler-féle szám. Legyen továbbá

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

   a szinusz-hiperbolikus, koszinusz-hiperbolikus és tangens-hiperbolikus függvény.

   Ellenőrizzük, hogy

   - $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
   - $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
   - $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
   - $\cosh(-x) = \cosh x$
   - $\sinh(-x) = -\sinh x$.

   Vajon miért viselik ezek a függvények a „szinusz” és „koszinusz” nevet? [1]

   Ábrázoljuk $\sinh x$-et, $\cosh x$-et és $\tanh x$-et!

[1] Később további rokonságra is fény fog derülni, és megtudjuk, honnan kapták a „hiperbolikus” jelzőt.

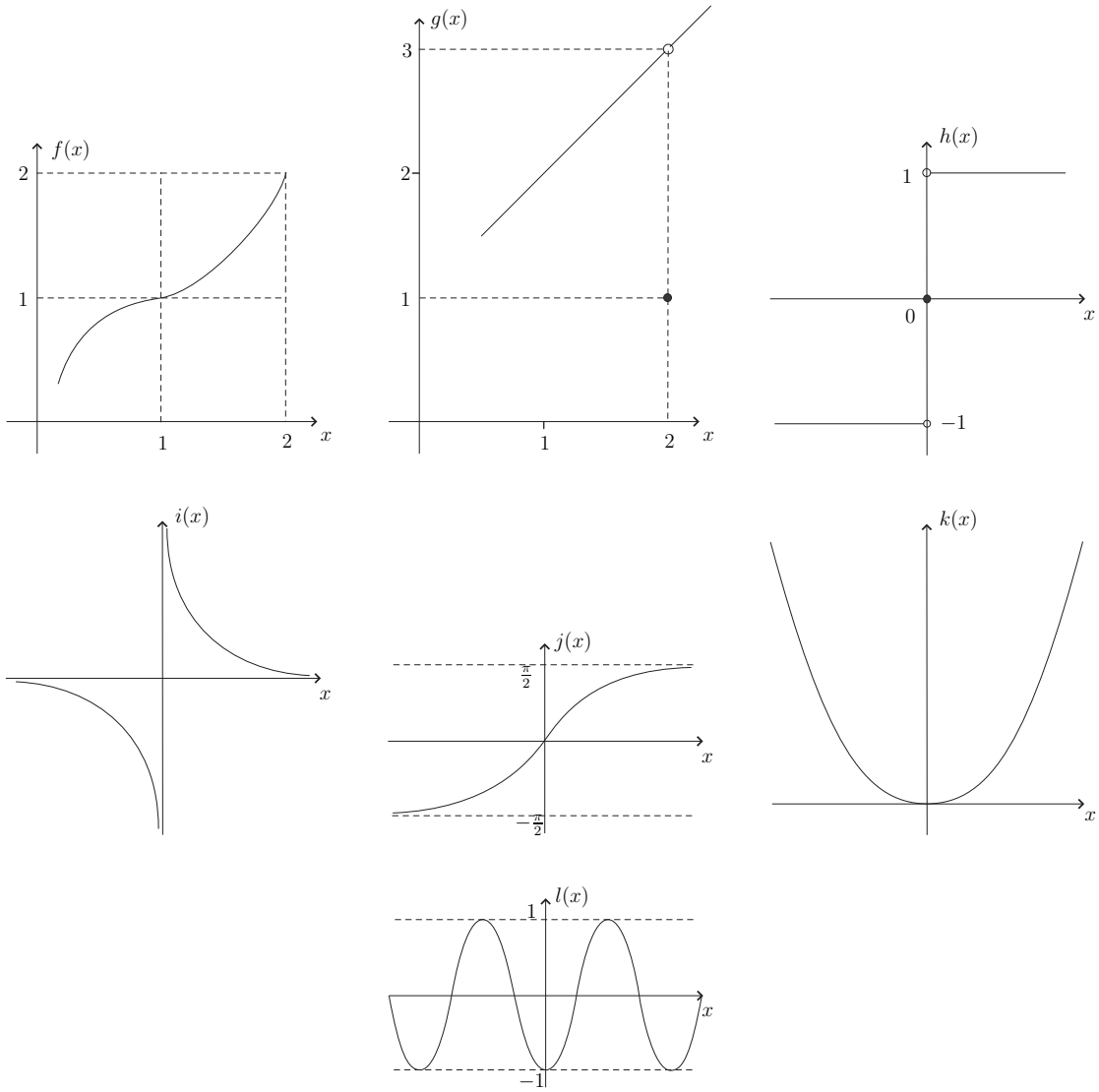
2. függvények határértéke

1. Az alábbi határértékeket olvassuk le a függvény grafikonjáról!

(a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ (g) $\lim\limits_{x\to 0} i(x)$ (j) $\lim\limits_{x\to -\infty} k(x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ (e) $\lim\limits_{x\to 0^-} h(x)$ (h) $\lim\limits_{x\to 0^-} i(x)$ (k) $\lim\limits_{x\to \infty} l(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)$ (f) $\lim\limits_{x\to 0^+} i(x)$ (i) $\lim\limits_{x\to \infty} j(x)$



2. Keressük meg az alábbi határértékeket behelyettesítéssel!

(a) $\lim\limits_{x\to 1} x^2$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} xe^{-x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-12}$

3. Az alábbi határértékeket sejtsük meg egy „közeli” szám behelyettesítésével!

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-12}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+100x-1000}{3x^2-x}$

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$

4. (a) Legyen $f(x)=x^2+2x+3$, és legyen $A=\lim\limits_{x\to 2} f(x)=11$, $\varepsilon=\frac{1}{100}$. Adjunk meg olyan $\delta>0$ számot, amire igaz, hogy ha $|x-2|<\delta$, akkor $|f(x)-A|<\varepsilon$.

   (b) Legyen $f(x)=\frac{x-2}{x+3}$, és legyen $A=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$, $\varepsilon=\frac{1}{1000}$. Adjunk meg olyan K számot, amire igaz, hogy ha $x>K$, akkor $|f(x)-A|<\varepsilon$.

   (c) Legyen $f(x)=\frac{x-2}{(x+1)^2}$, ekkor $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=-\infty$. Legyen $N=1000000$. Adjunk meg olyan $\delta>0$ számot, amire igaz, hogy ha $|x-(-1)|<\delta$, akkor $f(x)<-N$.

   (d) Legyen $f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{, ha } x\neq 0 \\ 0 & \text{, ha } x=0 \end{cases}$, és legyen $A=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Minden $\varepsilon>0$-hoz adjunk meg olyan $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ számot, amire igaz, hogy ha $|x-0|<\delta$, akkor $|f(x)-A|<\varepsilon$.

5. Keressük meg az alábbi határértékeket (vagy tágabb értelemben vett határértékeket), ha léteznek!

   (a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2}{x-2}+\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{6}{x-2}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+3x^2-4}{x^3-3x+2}$

   (e) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9}$

   (f) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x$

   (g) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x$

   (h) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}$

   (i) $\lim\limits_{x\to\infty} \cosh x$

   (j) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sinh x$

   (k) $\lim\limits_{x\to\infty} \tanh x$

   (l) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-100x^2}{x^2-99x}$

   (m) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^4-3x^2+2}{3x^4+2x^2-2}$

   (n) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{x+2}}$

   (o) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x+2}}$

   (p) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})$

   (q) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+1}$

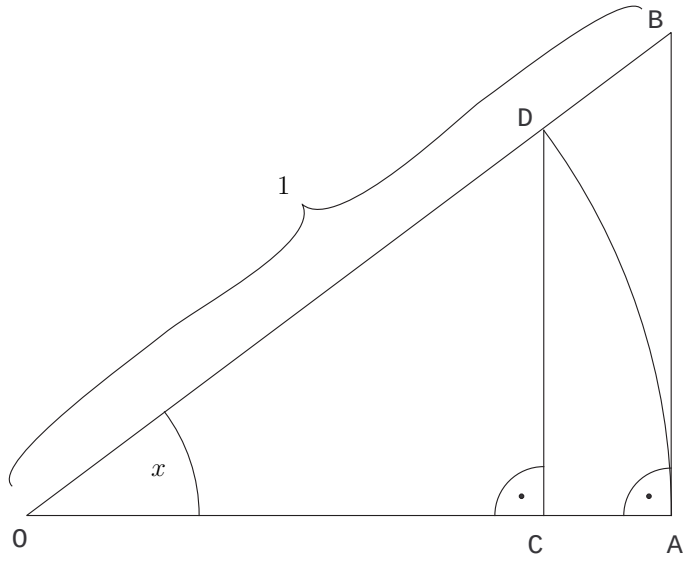
   (r) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^e}$

   (s) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin x}{x}$

   (t) $\lim\limits_{x\to\infty} \sin^2 x\dfrac{1+x}{1-x}+\cos^2 x(e^{-x}-1)$

6. *

   (a) Hasonlítsuk össze az ábrán látható OCD háromszög, az OAD körcikk és az OAB háromszög területét! Ez alapján bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{x}=1$. Ezután bizonyítsuk be, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}=1$.

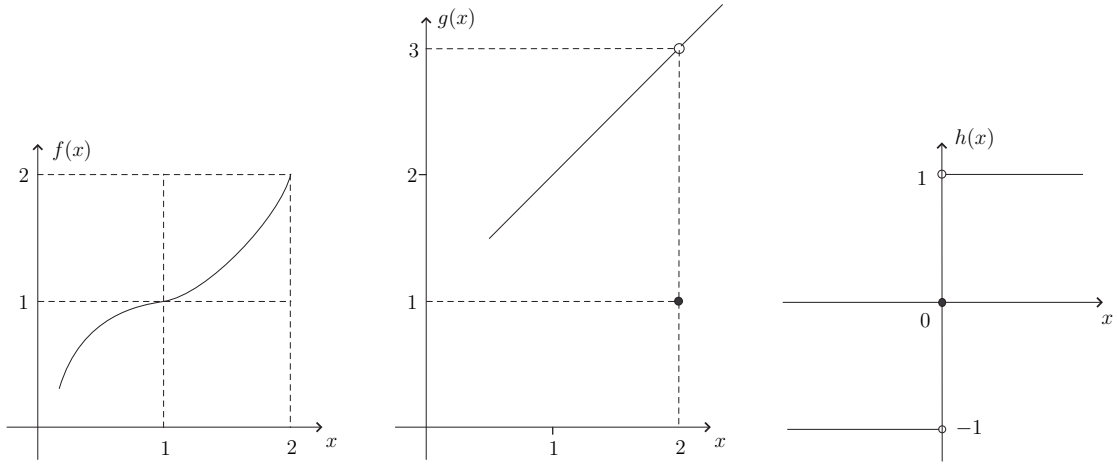


(b) Mennyi $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$?

3. folytonosság, differenciálhányados

1. Folytonosak-e az alábbi függvények az adott pontban?

   (a) $f(x)$ az $x_0 = 1$-ben (b) $g(x)$ az $x_0 = 2$-ben (c) $h(x)$ az $x_0 = 0$-ban



2. Legyen $f(x) = \frac{x^3-3x^2+3x-9}{x-3}$. Keressünk olyan g függvényt, amire

   - $f(x) = g(x)$ mindenütt, ahol $f(x)$ létezik
   - g minden valós számra értelmezve van
   - g folytonos.

   Más szóval keressük f folytonos kiterjesztését a valós számok halmazára.

3. Hogyan válasszuk az a paraméter értékét, hogy az adott függvény folytonos legyen?

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 9 & \text{, ha } x \neq 1 \\ a & \text{, ha } x = 1 \end{cases}$

   (b) $g(x) = \begin{cases} a + \cos x & \text{, ha } x < 0 \\ \sin x & \text{, ha } x \geq 0 \end{cases}$

   (c) $h(x) = \begin{cases} a^2 e^x & \text{, ha } x < 0 \\ a(x+1) & \text{, ha } x \geq 0 \end{cases}$

4. Mennyi

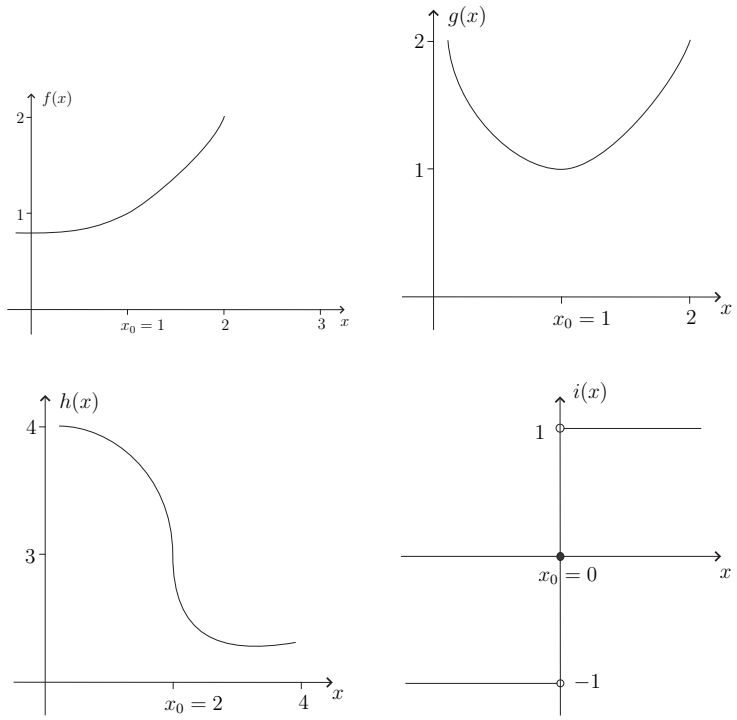
   (a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$; $\cos(0)$; $\lim\limits_{x\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

   (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}$; $\operatorname{sign}(0)$; $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sign}\left(\frac{1}{x}\right)$

   (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$; $\lim\limits_{x\to\infty} \cos\left(\frac{\sin x}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sign}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

   Itt $\operatorname{sign}(x)$ az előjelfüggvényt jelöli (az 1. feladat beli h függvény). Mi a lényeges különbség a cos és a sign függvény között?

5. Vonalzó segítségével olvassuk le az ábráról a függvény x_0-beli differenciálhányadosát!



6. (a) A definíció alapján számoljuk ki az adott függvény x_0-beli differenciálhányadosát, $f'(x_0)$-t!
   i. $f(x) = x$, $x_0 = 1$
   ii. $f(x) = x^3$, $x_0 = 2$
   iii. $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 3$
   (b) Ugyanezen függvények differenciálhányadosát számoljuk ki *minden* x_0-ra, és ez alapján adjuk meg a függvény deriváltját!

7. * Keressük meg a definíció alapján $\sin x$ és $\cos x$ deriváltját!

8. * Pozitív a számokra teljesül az $a^x = 2^{(\log_2 a)x}$ azonosság. Ez alapján rajzoljuk fel az a^x grafikonját, mint a 2^x grafikonjának transzformáltját néhány 1-nél nagyobb a esetén!

   - Hogyan függ a grafikon $x_0 = 0$-beli meredeksége az a-tól?
   - Lássuk be, hogy van egy olyan $\hat{a}$ érték, amire ez a meredekség pontosan 1, vagyis $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\hat{a}^h - \hat{a}^0}{h} = 0$.
   - Erre az $\hat{a}$-ra a definíció alapján keressük meg az $f(x) = \hat{a}^x$ függvény deriváltját! [2]

[2] Megjegyzés: ez a nevezetes $\hat{a}$ érték éppen az Euler féle szám, $\hat{a} = e \approx 2,7182818285$

4. a deriválás technikája

1. Deriváljuk az alábbi függvényeket!

   (a) $x^2 + 6x + 9$
   (b) $-\cos x - \frac{\sin x}{2} + 2\ln x - e^x$
   (c) $x^2 + 2^x + \log_2 x + \sinh x - \cosh x$
   (d) xe^x
   (e) $2e^x \sinh x$
   (f) $xe^x \sin x$
   (g) $xe^x \sin x \ln x$
   (h) $\tan x$
   (i) $\frac{\sin x}{x}$
   (j) $\cos(2x)$
   (k) $\cos(\cosh(\cos x))$
   (l) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
   (m) $x \sin(\sqrt{x^2+1}\frac{1-x}{1+x} + 5)$
   (n) $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$
   (o) $\frac{1}{2}(\ln(1+x) - \ln(1-x))$
   (p) $\log_x 2$
   (q) x^x
   (r) $(\cos x)^{\sin x}$

2. Az inverz függvény deriválási szabályát használva deriváljuk:

   (a) $\ln x$ (b) $\arcsin x$ (c) $\arctan x$

3. (a) Az $y = y(x)$ függvényről azt tudjuk, hogy $y^3 + y = x$. Mennyi $y'(0)$?
   (b) Az $y = y(x)$ függvényről azt tudjuk, hogy $y^3 + y = x^3 + 2x$. Mennyi $y'(0)$?

4. Számoljuk ki az $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ függvény második deriváltját!

5. Számoljuk ki a $g(x) = \frac{1}{1-x}$ függvény összes deriváltját!

6. * Ha az $f(x)^{g(x)}$ függvény deriválásakor $g(x)$-et konstansnak tekintenénk, akkor az $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ szabály és az összetett függvény deriválási szabálya alapján

$$g(x)f(x)^{g(x)-1}f'(x)$$

   -et kapnánk, ami persze hibás.

   Ha pedig $f(x)$-et tekintenénk konstansnak, akkor $(a^x)' = a^x \ln a$-ból kiindulva

$$f(x)^{g(x)} \ln f(x) g'(x)$$

   -et kapnánk, persze ez is hibás.

   Mégis: lássuk be, hogy a két hibás megoldás *összege* helyes:

$$\left(f(x)^{g(x)}\right)' = g(x)f(x)^{g(x)-1}f'(x) + f(x)^{g(x)} \ln f(x) g'(x)$$

7. * Számoljuk ki az

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \qquad \ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}, \qquad \operatorname{artanh}(x), \qquad \operatorname{arcoth}(x)$$

   függvények deriváltját. (Az utolsó kettő az *area tangens hiperbolikus* és az *area kotangens hiperbolikus*.) Mit kapunk, és hogy lehet ez?

5. a deriválás alkalmazásai 1.

1. Írjuk fel az $f(x) = \sin x + \cos x$ függvény grafikonja $x_0 = \frac{3\pi}{4}$-beli érintőjének egyenletét!

2. Keressük meg az $y = x^2$ parabolának azt az érintőjét, amelyik átmegy a $(0; -2)$ ponton!

3. (a) Keressük meg az $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$ függvény minimumát!
   (b) Keressük meg az $f(x) = \frac{x}{2} + \sin x$ függvény szélsőértékeit a $[-\pi; 2\pi]$ intervallumon!

4. Mennyi az 1 sugarú gömbbe beleférő legnagyobb térfogatú henger sugara, magassága és térfogata?

5. (a) Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ függvény szigorúan monoton nő!
   (b) Bizonyítsuk be, hogy az $f(x) = x \ln x$ függvény konvex!

6. Számoljuk ki az alábbi határértékeket!

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2 + 4x - 21}{2x^2 - x - 15}$

   (c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{e^x}{x}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x$

   (f) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{a}{x}\right)^x$

   (g) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)^x$

   (h) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

   (i) $\lim\limits_{x\to 0} \cos x^{\frac{1}{\sin x}}$

   (j) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt[x]{x}$

   (k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x^2}$

7. Írjuk fel az $f(x) = \sin(x)$ függvény negyedfokú Taylor-polinomját!
   (a) Számoljuk ki $f(0,01)$ közelítő értékét a Taylor-polinom segítségével!
   (b) A Taylor tétel segítségével becsüljük meg a közelítés hibáját!
   (c) Mennyi a tényleges hiba? Számoljuk ki számológéppel!

8. Keressük meg az $xe^{-x} = \frac{1}{4}$ egyenlet megoldását 8 tizedesjegy pontossággal! Ehhez az $f(x) = xe^{-x} - \frac{1}{4}$ függvény zérushelyeit keressük Newton-módszerrel.

   Indítsuk el az algoritmust $x_0 = 0$-ból, $x_0 = 1$-ből, $x_0 = 2$-ből is! Mi történik?

   Hány lépés kell a 8 tizedesjegy pontosság eléréséhez?

   Hány lépésben lehetne ugyanezt a pontosságot az intervallumfelező módszerrel elérni?

   (annak, aki ráér: Mi történik $x_0 = 5$-ből indulva?)

9. Az $x(t) = t + e^{-t} - 1$ függvény egy egyenes vonalú mozgást végző részecske helyét adja meg az idő függvényében, $t \geq 0$-ra. [3]

   Mennyi a részecske sebessége a $t = 1$ pillanatban?

   Mennyi a részecske kezdeti gyorsulása?

   Hosszú idő elteltével mennyi a részecske sebessége és gyorsulása?

[3] Ez a függvény pl. egy levegőben zuhanó kicsi olajcsepp mozgását írja le jó közelítéssel.

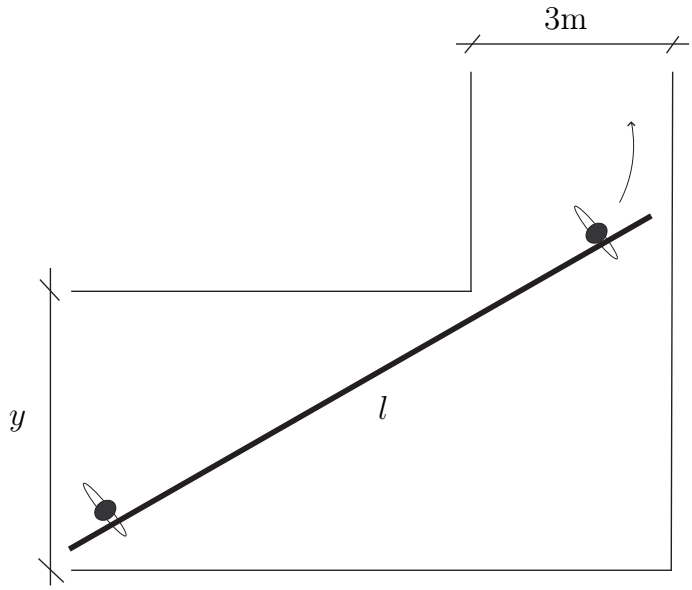
10. Egy váltakozó áramú áramkörbe kapcsolt kondenzátor töltése az idő függvényében $Q(t) = Q_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$.

    Mennyi a körben folyó maximális áramerősség?

11. Egy autó egyenletesen gyorsul: sebessége az idő függvényében $v(t) = 2t$. [4] Az autó tömege $m = 2000kg$, a mindenkori mozgási energia $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2$.

    Mennyi az autó gyorsítására fordított teljesítmény a $t = 10$ pillanatban?

12. * Két ember egy $l = 10$ méter hosszú létrát visz a vállán vízszintes helyzetben, amikor a folyosónak az ábrán látható derékszörű kanyarulatához érkeznek.



    Legalább mennyi legyen y, hogy be tudják venni a kanyart?

13. * Legyen $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ha } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{, ha } x > 0 \end{cases}$.

    (a) Bizonyítsuk be, hogy f differenciálható a 0-ban!

    (b) Bizonyítsuk be, hogy f akárhányszor differenciálható a 0-ban!

[4] az időt másodpercben, a sebességet $\frac{m}{s}$-ban mérjük

6. a deriválás alkalmazásai 2.: függvényvizsgálat

Az alábbi függvényekre a következő vizsgálatokat végezzük el:

1.) Adjuk meg az értelmezési tartományt: D_f

2.) Keressük meg a függvény határértékét az értelmezési tartomány szélein!

3.) Számoljuk ki $f'(x)$-et. Keressük meg a zérushelyeit. Vizsgáljuk meg f' előjelét D_f-en. Adjuk meg, hogy f hol növekvő, hol csökkenő, hol van minimuma/maximuma vagy egyéb stacionárius helye!

4.) Számoljuk ki $f''(x)$-et. Keressük meg a zérushelyeit, és vizsgáljuk meg f'' előjelét D_f-en. Adjuk meg, hogy f hol konvex, hol konkáv, és hol van inflexiós pontja!

5.) Ábrázoljuk a függvényt!

6.) Az ábráról olvassuk le az értékkészletet!

Jó tanács: A függvény grafikonjából célszerű az 1.) - 4.) lépések során mindig megrajzolni annyit, amennyit már tudunk. Így nagyon sok hiba kiszűrhető.

1. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

2. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

3. $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}$

4. $f(x) = \frac{x^4-1}{x^2}$

7. határozatlan integrál 1.

1. Keressük meg az alábbi határozatlan integrálokat!

(a) $\int x^3 + 6x^2 + 5x - 1 \,\mathrm{d}x$
(b) $\int 4\cos x - \frac{\sin x}{8} + 2^x \,\mathrm{d}x$
(c) $\int -e^x - 4\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$
(d) $\int -\sqrt[3]{x^2} + \frac{3}{x} \,\mathrm{d}x$
(e) $\int \frac{1}{\cos^2 x} + \tan^2 x \,\mathrm{d}x$
(f) $\int \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \,\mathrm{d}x$
(g) $\int \cos(2x) \,\mathrm{d}x$
(h) $\int 2x \sinh(x^2) \,\mathrm{d}x$
(i) $\int (\sin x)^{100} \cos x \,\mathrm{d}x$
(j) $\int x\sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x$
(k) $\int \frac{x}{\sqrt{1-5x^2}} \,\mathrm{d}x$
(l) $\int \frac{x}{2+x^2} \,\mathrm{d}x$
(m) $\int xe^{x^2} \,\mathrm{d}x$
(n) $\int \cos x \sin x e^{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$
(o) $\int \tan x \,\mathrm{d}x$
(p) $\int (1+x)(1-x) \,\mathrm{d}x$
(q) $\int (2x+x^2)^3 \,\mathrm{d}x$
(r) $\int xe^x \,\mathrm{d}x$
(s) $\int \frac{x}{2} \sin(2x) \,\mathrm{d}x$
(t) $\int x^2 \cos(2x) \,\mathrm{d}x$
(u) $\int \ln x \,\mathrm{d}x$
(v) $\int \arcsin x \,\mathrm{d}x$
(w) $\int \frac{x^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \,\mathrm{d}x$
(x) $\int \sinh x e^x \,\mathrm{d}x$
(y) $\int \cosh^3 x \,\mathrm{d}x$
(z) $\int \frac{1}{\cos x} \,\mathrm{d}x$

2. Bontsuk az integrandust parciális törtekre, majd végezzük el az integrálást!

(a) $\int \frac{1}{x^2+3x+2} \,\mathrm{d}x$
(b) $\int \frac{x^2+1}{x^3-2x^2-x+2} \,\mathrm{d}x$
(c) $\int \frac{1}{x^3+2x^2+x+2} \,\mathrm{d}x$
(d) $\int \frac{x-1}{x^3+x^2} \,\mathrm{d}x$

3. Írjuk az integrandust $\text{polinom}_1 + \frac{\text{polinom}_2}{\text{polinom}_3}$ alakba, ahol polinom_2 fokszáma kisebb, mint polinom_3-é!

(a) $\int \frac{x^2+3x-3}{x-1} \,\mathrm{d}x$
(b) $\int \frac{x^3+4x^2+5x}{x^3+3x+2} \,\mathrm{d}x$

4. Végezzük el az alábbi integrálokat úgy, hogy először az integrandust trigonometrikus függvények *összegévé* alakítjuk!

(a) $\int \sin x \cos(2x) \,\mathrm{d}x$
(b) $\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x$

Megjegyzés: Érdekes megfigyelni, hogy a $\cos^2 x$ függvény grafikonja hasonló a $\cos x$ grafikonjához a szó geometriai értelmében: a felére kicsinyítettjének eltoltja.

5. Keressük meg az alábbi határozatlan integrálokat!

(a) $\int \sin x \, e^x \,\mathrm{d}x$
(b) $\int \sin x \cos x (e^x + e^{2x}) \,\mathrm{d}x$

6. * Végezzük el az alábbi integrálást!

$$\int \frac{16}{x^4+4} \,\mathrm{d}x$$

8. határozatlan integrál 2 (helyettesítéses), határozott integrál

1. Hajtsuk végre az alábbi integrálokban az előírt helyettesítéseket!

   (a) $\int \frac{1}{2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x; \quad x = y^2$

   (b) $\int \frac{1}{9+x^2}\,\mathrm{d}x; \quad x = 3y$

   (c) $\int \frac{1+\cos x}{1-\cos x}\sin x\,\mathrm{d}x; \quad y = \cos x$

   (d) $\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x; \quad y = \sin x$

2. Alkalmas (esetleg többszöri) helyettesítéssel számítsuk ki az integrálokat!

   (a) $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$

   (b) $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

   (c) $\int \sqrt{2-x^2}\,\mathrm{d}x$

   (d) $\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

   (e) $\int \frac{e^x-1}{e^x+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$

3. Számítsuk ki az alábbi határozott integrálokat!

   (a) $\displaystyle\int_0^1 1 - x + 3x^2 - x^3 + x^4 + x^6\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x}{2+x^2}\,\mathrm{d}x$

4. Számoljuk ki a geometriai jelentése alapján:

   (a) $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$

   (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

   A $\sin^2 x$ egész periódusra vett integrálásához vegyük észre, hogy egyrészt $\sin^2 x$ és $\cos^2 x$ egymás eltoltjai, másrészt $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

5. Számoljuk a határozott integrált úgy, hogy a parciális integrálást, illetve a helyettesítést közvetlenül a *határozott* integrálon csináljuk (integrálási határok követése)

   (a) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{3}{\pi}} \frac{\sin^2\frac{1}{x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

6. * Számoljuk ki az $\int \frac{\sin(2x)-\cos(2x)}{\sin^2 x - 4\cos x}\,\mathrm{d}x$ integrált!

   Ehhez az
   $$y = \tan\frac{x}{2}$$
   helyettesítést javaslom. Először lássuk be [5] , hogy ekkor $\cos x$, $\sin x$ és $\frac{dx}{dy}$ is *racionális törtfüggvénye* y-nak, konkrétan
   $$\cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}; \qquad \sin x = \frac{2y^2}{1+y^2}; \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$$
   Vegyük észre, hogy emiatt ezzel a helyettesítéssel *tetszőleges* trigonometrikus törtfüggvény integrálja visszavezethető racionális törtfüggvény integrálására.

[5] használjuk, hogy $\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}$

9. integrál alkalmazásai

1. Számoljuk ki az $y = x^4$ és $y = x^3$ görbék grafikonjai közé eső területet!

2. Számoljuk ki az $y = \cosh x$ láncgörbe $x = -1$ és $x = 1$ közé eső darabjának

   (a) ívhosszát (b) súlypontját

3. Számoljuk ki az $y = x^2$ parabola $[-1; 1]$ fölé eső darabjának y tengely körüli megforgatásával keletkező edény térfogatát és felszínét!

4. Számoljuk ki a gömb térfogatát és felszínét!

5. Keressük meg a homogén tömör félgömb súlypontját!

6. Keressük meg a homogén félgömbhéj súlypontját!

7. Forgassuk meg az $f(x) = \frac{1}{2}x$ függvény grafikonjának $[-1; 1]$ fölé eső darabját az x tengely körül! Ha a kapott kúppalástot vékony lemezből elkészítjük, aminek a felületi sűrűsége mindenütt ρ (ha x méterben van, akkor ρ $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$-ben), mennyi lesz a palást x forgástengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka?

   A tehetetlenségi nyomaték egy lehetséges definíciója:

$$\Theta_x = \sum_{\text{összes atomra}} (\text{atom tömege})(x \text{ tengelytől való távolság})^2$$

8. A Toldi Miklós kezében lévő szálfa vízszintes helyzetű és kerek. Hossza 5 méter, vastagsága az egyik végén (Miklós hóna alatt) 15cm, a másik végén csak 10cm, és közben egyenletesen vékonyodik. Sűrűsége $0,7\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

   (a) Mekkora a fa súlyának Miklós vállának tengelyére kifejtett forgatónyomatéka?

   (b) Miklós keze 70cm hosszú. A csuklójával mekkora erővel kell tartania a fát?

9. $V_0 = 1$ liter, kezdetben $p_0 = 10^5$Pa nyomású ideális gázt izotermikus folyamat során felére összenyomunk. Mennyi munkát végzünk ez alatt?

   (Középiskolában azt tanultuk, hogy $\Delta W_{\text{külső}} = -p\Delta V$, illetve $p = p_0\frac{V_0}{V}$.) [6]

10. Egy egyenes vonalú mozgást végző testre egy helytől függő $F(x) = \frac{1}{x^2}$ erő hat [7] (a mozgás irányával párhuzamosan). Mekkora az erő által a testen végzett munka, mialatt a test $x_1 = 1$-ből $x_2 = 10$-be jut?

11. Egy autó úgy gyorsít, hogy a mozgási energiája a mozgás során egyenletesen nő (vagyis a teljesítmény állandó): $\frac{m}{2}v^2 = Pt$. (Legyen $m = 2000$kg, $P = 40$kW.) Mennyi az első 10 másodperc során az átlagsebessége?

12. Egy váltakozó áramú áramkörben folyó áram erőssége az idő függvényében $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$.

[6] Ez utóbbi egyenlet jellemzi az izotermikus állapotváltozást. Ennél érdekesebb lenne az adiabatikus állapotváltozást tárgyalni, de nehezebb is.

[7] Ilyen a Coulomb erő és a gravitáció.

(a) Mennyi egy periódus során az áram *abszolút értékének* átlaga (effektív áramerősség)? (az áram előjeles átlaga nyilván nulla)

Vagy, ami majdnem ugyanez: mennyi az egy periódus alatt a keresztmetszeten (oda-vissza) átáramló töltés?

(b) *bónusz, csak ha valakit érdekel:* Legyen $I_0 = 10\text{A}$ és $\omega = 2\pi f$, $f = 50\text{Hz}$. Ha az egy periódus alatt átáramló töltést össze lehetne szedni, és két példányt belőle elhelyezni egymástól 1m-re, mekkora erővel taszítanák egymást?

13. * Számoljuk ki a homogén egységnyi (felületi) sűrűségű körlemez tehetetlenségi nyomatékát (a középpontjára nézve [8]) úgy, hogy keskeny körgyűrűkre bontjuk, és ezek tehetetlenségi nyomatékát (ami könnyű) összeadjuk.

14. * Az $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos x$ görbe $[0; 4\pi]$ fölé eső darabjának x tengely körüli megforgatátával keletkező (tömör) esztergált székláb homogén $0,7$ sűrűségű anyagból készült.

Mennyi a tömege?

Mennyi a forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka?

(Ehhez a feladathoz szükséges előzmény a 13. feladat, vagy egy készre gyártott képlet.)

[8] pontosabban: a középpontján átmenő, a síkjára merőleges tengelyre nézve

10. közelítő integrál, improprius integrál

1. Keressük az $y^2 - x^2 = 1$ hiperbola $y > 0$ ágának $x = 0$ és $x = 0,5$ közötti darabjának ívhosszát.

   (a) Írjuk fel ezt az ívhosszt mint az $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ függvény grafikonjának ívhosszát integrálként!

   (b) Rövid próbálkozással győződjünk meg róla, hogy a kapott integrált nem tudjuk elvégezni (nehéz).

   (c) Számoljunk közelítő értéket téglalap módszerrel, az intervallumot 5 egyenlő darabra osztva!

   (d) Számoljunk közelítő értéket trapéz módszerrel, az intervallumot 5 egyenlő darabra osztva!

   (e) Hajtsuk végre az $x = \sinh \frac{t}{2}$ helyettesítést. (Ettől persze az integrál nem lesz könnyebb.) A kapott integrálban az integrandust közelítsük a másodfokú Taylor polinomjával, és számoljunk így közelítő integrált!

   (f) Az ívhossz tényleges értéke $0,517648$. Nézzük meg, melyik módszerrel mennyit hibáztunk!

2. Keressük $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ értékét.

   (a) Becsüljünk téglalap, illetve trapéz módszerrel, az intervallumot 5 egyforma darabra osztva

   (b) Bacsüljünk úgy, hogy az integrandust negyedfokú Taylor-polinaomjával közelítjük!

   (c) Az integrál tényleges értéke 8 jegy pontossággal $0,09994446$. Melyik módszer volt a legjobb?

   (d) Mi lenne a helyzet, ha $\displaystyle\int_0^{10} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ értékét keresnénk? Hanyad fokú Taylor-polinomot kellene használni, hogy a becslés elfogadható legyen?

   (e) Mi a helyzet $\displaystyle\int_0^{10} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ becslésével?

3. Számoljunk becslést $\displaystyle\int_0^{10} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ értékére Monte Carlo módszerrel: a csoportban mindenki számolja ki $\frac{|\sin x|}{x}$ értékét három véletlenül választott $[0; 10]$-beli x-re. A becslésünk legyen a kapott értékek átlagának 10-szerese. (Miért?)

   Megjegyzés: a feladat harminc fős csoporthoz van méretezve. Kis csoportban nagy valószínűséggel rossz a becslés. A tényleges érték kb. $2,55$.

4. Léteznek-e az alábbi improprius integrálok? Ha igen, ki tudjuk-e őket számolni?

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int_1^\infty \ln x\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\,\mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(g) $\displaystyle\int_0^\infty x^{100}e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(h) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$

(j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$

(k) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x$

(l) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

(m) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(n) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

(o) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x^{1,01}}\,\mathrm{d}x$

(p) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

(q) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x\ln\ln x}\,\mathrm{d}x$

(r) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$

(s) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

(t) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1,01}}\,\mathrm{d}x$

(u) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$

(v) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

(w) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$

(x) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty xe^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$

(y) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^{100}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$

5. Közelítsük integrállal az alábbi összegeket! Becsüljük meg az elkövetett hibát!

(a) $\displaystyle\sum_{n=10}^{1000} \frac{1}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=10}^{100} \frac{1}{n^2}$

6. * Számoljuk ki az $\displaystyle\int_1^n \ln x\,\mathrm{d}x$ integrál alsó és felső integrálközelítő összegét úgy, hogy az $[1;n]$ intervallumot $n-1$ egyenlő (1 hosszú) részre osztjuk fel. Ez alapján adjunk közelítő képletet $\ln(n!)$ értékére![9] (Az integrált egzaktul ki tudjuk számolni.)

7. Becsüljük meg az $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ ellipszis kerületét az 1. feladat módszereivel! Célszerű egyszerre csak a kerület negyedét számolni. Az 1e.) lépésben az $x=\sqrt{2}\cos t$ helyettesítést javaslom.

[9] Amit kapunk az ú.n. Stirling-formula alső néhány tagja.

11. komplex számok

1. Adjuk meg az alábbi komplex számok valós és képzetes részét, és ábrázoljuk őket a komplex síkon!

   (a) $1+i$
   (b) $1-i$
   (c) -1
   (d) 0
   (e) $2i$
   (f) $-7+i$

2. Adjuk meg az alábbi komplex számok komplex konjugáltját, illetve abszolut értékét!

   (a) $1+2i$
   (b) $2+4i$
   (c) $3+6i$
   (d) $-1-2i$
   (e) $3+4i$
   (f) $6+8i$
   (g) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
   (h) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$

3. Végezzük el az alábbi műveleteket! (adjuk meg az eredményt algebrai alakban)

   (a) $(3+4i)+(5+5i)$
   (b) $(2+i)-(-2-2i)$
   (c) $(2-i)(3-i)$
   (d) $i(-i)$
   (e) $0\cdot(4+i)$
   (f) $[(1+2i)(1+3i)](2+i)$
   (g) $(1+2i)[(1+3i)(2+i)]$
   (h) $(2-i)(2+i)$
   (i) $i(1+i)$
   (j) $(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$
   (k) $(2-i)/(3-i)$
   (l) $(2-i)/(2+i)$
   (m) $i/(1+i)$
   (n) $1/i$
   (o) $1/(-i)$

4. Az alábbi komplex számokat írjuk algebrai alakba!

   (a) $0(\cos 1+i\sin 1)$
   (b) $1(\cos 0+i\sin 0)$
   (c) $1(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$
   (d) $1(\cos\pi+i\sin\pi)$
   (e) $1(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2})$
   (f) $3(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$
   (g) $3(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4})$
   (h) $2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$
   (i) $2\sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$
   (j) $3(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$

5. Az alábbi komplex számokat írjuk trigonometrikus alakba! (Egyesek máris abban vannak.)

   (a) 1
   (b) -1
   (c) i
   (d) $-i$
   (e) $-6i$
   (f) $1+i$
   (g) $1-i$
   (h) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
   (i) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$
   (j) $-\sqrt{3}-i$
   (k) $-2+\sqrt{12}i$
   (l) $3(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$
   (m) $3(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2})$
   (n) $-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}$
   (o) $\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{-\pi}{6}$
   (p) $-(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

6. Legyen $z_1=1(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2})$, $z_2=3(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$, $z_3=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$. Számoljuk ki a $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_2}{z_3}$ és $\frac{z_3}{z_1}$ hányadosokat!

7. Végezzük el az alábbi hatványozásokat!

(a) $\left(1(\cos\frac{-\pi}{2}+i\sin\frac{-\pi}{2})\right)^2$ (d) $\left(2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})\right)^{100}$ (g) $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^4$

(b) $\left(3(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})\right)^3$ (e) $(-6i)^4$

(c) $\left(3(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4})\right)^{-6}$ (f) $(1+i)^7$ (h) $\left(-\sqrt{3}-i\right)^{-3}$

8. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket! (Más szóval: végezzük el a gyökvonást!)

   (a) $z^3 = 1$ (c) $z^6 = 1+i$

   (b) $z^5 = i$ (d) $z^2 = -1$

9. Oldjuk meg az alábbi egyenleteket!

   (a) $z^2 - 2z + 2 = 0$ (b) $z^2 + z + 1 = 0$

10. Bontsuk fel az x^4+1 valós együtthatós polinomot legfeljebb másodfokú, valós együtthatós polinomok szorzatává! (Az Algebra Alaptétele kimondja, hogy ez lehetséges.)

11. Oldjuk meg az $iz^2 + (3i-3)z - 5 = 0$ egyenletet!

12. koordinátageometria

1. Legyen $a = (1; 2; 3)$, $b = (4; 5; 6)$ a 3-dimenziós euklideszi tér két vektora! Számoljuk ki $|a|$-t, $|b|$-t, $a \cdot b$-t és $\sphericalangle(a, b)$-t!

2. Legyen $A = (1; 0; 2)$ és $B = (1; 2; 0)$ két pont egy 3-dimenziós Descartes-koordinátarendszerben. Írjuk fel a rájuk illeszkedő egyenes paraméteres egyenletét, és (egy lehetséges) egyenletrendszerét!

3. Adott egy egyenes egyenletrendszere. Olvassuk le az irányvektorát!

   (a) $\frac{x-2}{2} = y + 1 = 2(z + 3)$

   (b) $\frac{x-2}{2} = y + 1, \quad z = -3)$

   (c) $x = 2, \quad y = 0$

   (d) $x + 2y + z = 2, \quad 2x - y + 3z = 5$

4. Írjuk fel az $A = (1; 0; 2)$ pontra illeszkedő, $n = (2; -3; 4)$ normálvektorú sík egyenletét!

5. Adott egy sík egyenlete. Olvassuk le a normálvektorát!

   (a) $x + 2y + z = 2$

   (b) $2x - \frac{y}{3} = 5$

6. Számoljuk ki az alábbi vektoriális szorzatokat!

   (a) $(1; 2; 1) \times (2; -1; 3)$

   (b) $(1; 0; 0) \times (0; 1; 0)$

   (c) $(a; b; 0) \times (c; d; 0)$

7. Ha a 3. feladat 3d.) része nehéz volt, próbáljuk meg újra!

8. Írjuk fel az $(1; 1; 1)$, $(1; 2; 3)$ és $(4; 5; 6)$ pontokra illeszkedő sík egyenletét!

9. Legyenek $A = (1; 0; 2)$ és $B = (1; 2; 0)$ pontok. e és az f legyenek egyenesek, melyek paraméteres egyenlete

$$e : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \qquad f : \begin{cases} x = 3t \\ y = -t \\ z = 5t \end{cases}$$

   Legyen továbbá az s_1 sík egyenlete $x+2y+z = 2$, az s_2 sík egyenlete pedig $2x-3y+3z = 5$.

   Számoljuk ki a következő távolságokat:

   (a) $d(A, B)$

   (b) $d(A, f)$

   (c) $d(A, s_1)$

   (d) $d(e, f)$

   (e) $d(e, s_2)$

   (f) $d(s_1, s_2)$

10. Írjuk fel az $(1; 2; 3)$, $(4; 5; 6)$ és $(7; 8; 9)$ pontokra illeszkedő sík egyenletét!