Matematika B4
II. gyakorlat

2006. február 23.

1. Kombinatorikus leszámolások

	ismétlés nélküli	ismétléses
permutáció	$n!$ n futó beérkezésének sorrendje	$\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!}$ n golyót ennyi féle képpen állíthatunk sorba, ha $k_1, k_2, \dots k_r$ db külön-külön egyszínű
variáció	$\frac{n!}{(n-k)!}$ n futó beérkezésének sorrendje ha csak az első k helyet tekintjük	l^k l darab betűből készíthető k hosszú szavak száma
kombináció	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ n golyóból kiválasztunk k darabot és nem számít a kiválasztás sorrendje	$\binom{k+l-1}{l}$ k féle sütiből (sok van belőlük) hazaviszünk l-et, ennyi féleképpen tehetjük meg

1. A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorba állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképpen tehetik ezt meg?
2. Hányféle sorrendben rakhatók ki a MATEMATIKA szó betűi?
3. Egy versenyen 5-en indulnak, az újságok az első három helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista? (Közlik a helyezést is.)
4. Egy fagyizóban 5 féle fagylalt kapható: vanília, csoki, málna, pisztácia és citrom. Hányféleképpen vehetünk 2 gombócot, ha számít a gombócok sorrendje is, és lehet 1 fajtából többet is venni?
5. Van 6 lányismerősöm, és 2-t el akarok hívni moziba. Hányféleképpen tehetem ezt meg?
6. 3 új tanárt és egy titkárnőt akarnak felvenni egy iskolában. 6 tanár és 3 titkárnő jelölt van. Hányféleképpen kerülhetnek ki közülük az iskola új dolgozói?
7. Egy számkombinációs zárat 3 db különböző, 1 és 10 közötti szám begépelésével lehet kinyitni, de tudjuk, hogy a számok növekvő sorrendben vannak. Hány ilyen kombináció van?

2. Valószínűség

Elvégzünk egy kísérletet, például feldobunk egy kockát, amelynek lehetséges eredményeit (adott esetben 1, 2, 3, 4, 5, 6 eseteket) **kimenetelek**nek nevezzük. A kimenetelek halmazát (összességét) **eseménytér**nek nevezzük. A kimeneteleket mi választjuk meg. Megtehetjük azt is, hogy azt a két lehetőséget nézzük, hogy hatost dobtunk-e, vagy sem. Ilyenkor 2 kimenetel van: 6-os, vagy nem 6-os, az eseménytér egy kételemű halmaz. A kimeneteleket, vagy azok függvényét valószínűségi változónak nevezzük, például X="kockadobásnál a fölül látható szám" egy valószínűségi változó. Ilynekor 6 kimenetel van: $1, 2, 3, 4, 5, 6$, az eseménytér az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ha az adott számok négyzetét tekintjük, akkor az $1 \to 1, 2 \to 4, 3 \to 9, 4 \to 16, 5 \to 25, 6 \to 36$ függvényre gondolhatunk, amely az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ eseménytéren értelmezett. Ilyenkor tekinthetjük egyből az $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$ eseménytért is, ezt mi választjuk meg.

Egy kísérletsorozatban az egyes kimenetelekhez tartozó relatív gyakoriságok a kísérletek számának növelésével bizonyos értékek körül "ingadoznak" (a kísérletszám növelésével konvergálnak egy-egy elméleti értékhez), ezt az értéket nevezzük az adott kimenetel **valószínűség**ének.

A kísérlet elvégzése közben nézhetjük azt, hogy egy adott **esemény** (állítás) bekövetkezik-e. Olyan eseményekkel fogunk foglalkozni, amelyek bekövetkezése egyértelműen eldönthető a kísérlet kimeneteléből. Ha például a kockadobás esetén ha az eseménytér az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, akkor az az esemény, mely szerint párosat dobtunk-e eldönthető a kimenetel ismeretében, míg az, hogy az asztal melyik részén állt meg a kocka, már nem.

Egy esemény valószínűségének elméleti kiszámolásához csak egy egyszerű elvet használunk fel: ha a kimenetelek egyformán valószínűnek tekinthetők, akkor egy adott esemény valószínűsége:

$$\textit{valószínűség} = \frac{\textit{kedvező kimenetelek száma}}{\textit{az összes kimenetel száma}}$$

Biztos esemény 1 valószínűségű (pl. a kocka dobásánál mekkora valószínűséggel dobunk pozitív számot), ez "mindig" bekövetkezik.
Lehetetlen esemény valószínűsége: 0.

Feladatok

7. Négyszer dobunk érmével és megfigyeljük mindegyik érmén, hogy melyik oldal van felül. Írjuk fel az eseményteret!

8. Addig dobunk érmével, amíg másodszorra fejet nem kapunk. Írjuk fel az eseményteret!

9. Feldobunk egy érmét kétszer egymásután. Mi a valószínűsége, hogy dobunk fejet? És hogy pontosan 1 db fejet dobunk?

10. Mi a valószínűsége annak, hogy 10 dobásból legalább egy 6-os?

3. Várható érték, szórásnégyzet, szórás

A lehetséges kimeneteleket jelöljük x_i-vel, a hozzájuk tartozó valószínűségeket pedig p_i-vel. Ekkor

1. Várható érték: $\boldsymbol{E}(X) = \sum_i p_i \cdot x_i$

2. Szórásnégyzet: $\boldsymbol{\sigma}^2(X) = \sum_i p_i(x_i - \boldsymbol{E}(X))^2 = (\sum_i p_i {x_i}^2) - (\boldsymbol{E}(X))^2$

3. Szórás: $\boldsymbol{\sigma}(X) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^2(X)}$

A nagy számok törvénye (tétel) szerint a kisérletszám növekedésével az átlag a várható értékhez, a szórás az elméleti úton kiszámolt szóráshoz konvergál.

Feldobtam egy kockát 200-szor. Minden egyes dobás után kiszámoltam az addig dobott érékek átlagát és szórását. Az eredményt az 1. ábra mutatja.

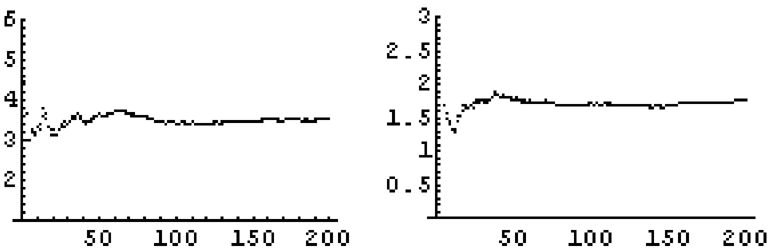
X helyett tekinthetjük $t(X)$-et, azaz X egy függvényét (például a kockadobás eredményeit négyzetre emeljük). A $t(X)$ várható értékére és szórására a következő összefüggések adódnak:

1. Várható érték: $\boldsymbol{E}(t(X)) = \sum_i p_i \cdot t(x_i)$

2. Szórásnégyzet: $\boldsymbol{\sigma}^2(t(X)) = \sum_i p_i(t(x_i) - \boldsymbol{E}(t(X)))^2 = (\sum_i p_i t(x_i)^2) - (\boldsymbol{E}(t(X)))^2$

3. Szórás: $\boldsymbol{\sigma}(t(X)) = \sqrt{\boldsymbol{\sigma}^2(t(X))}$

Szemléletesen olyan, mintha a kocka oldalaira új címkéket ragasztanánk $1, 4, 9, 16, 25, 36$ számokkal, így nem meglepő, hogy a képletekben p_i értékek változatlanok maradnak, míg x_i-t mindenhol formálisan kicseréljük $t(x_i)$-re.



1. ábra.

Feladatok

11. Mennyi a szabályos kockával végzett kockadobás során a dobott szám várható értéke? Szórása?
12. A kockadobás értékét megszorzom 3-mal, és hozzáadok 5-öt. Mennyi az így kapott szám várható értéke? Szórása?
13. A diszkrét P eloszlás tagjai: p(x)=$\frac{x^2}{30}$ (x=1,2,3,4). Mennyi az eloszlás várható értéke? Szórása?
14. Tételezzük fel a 700 Ft, 10000 Ft, 789 ezer Ft és 535 millió Ft fix nyereményeket a lottón. 150 Ft-os jegyárral számolva, mekkora, egy szelvénnyel fogadva, nyereségünk várható értéke?
15. Péter, ha kockával páratlant dob 100 Ft-ot veszít, ha 6-ot dob 400 Ft-ot nyer, ha 2-öt, vagy 4-et dob, újból dob. A második dobásnál 10 Ft-ot nyer, ha párost dob, 20-at veszít, ha páratlant dob. Előnyös-e ez a játék számára?

4. Folytonos egyenletes eloszlás

Ha egy véges intervallumra úgy dobunk egy pontot, hogy a pont az intervallum bármely részintervallumára annak hosszával arányos valószínűséggel essen, akkor a pont koordinátája egyenletes eloszlású az adott intervallumon. Jelölje a és b ennek a véges intervallumunk két végpontját. Annak a valószínűsége, hogy egy ilyen eloszlású véletlen szám egy d hosszúságú szakaszba essen (a fentiek alapján): $\frac{d}{b-a}$.

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz hossza}}{\text{az egész eseménytér hossza}}$$

Hasonló elgondolás alapján ha egy pont egy véges területű síktartomány bármely részére a kiválasztott rész területével arányos valószínűséggel esik, akkor a pont helyének eloszlása egyeneletes eloszlású az adott síktartományon.

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz területe}}{\text{az egész eseménytér területe}}$$

Véges térfogatú térrészen értelmezett egyenletes eloszlás esetén:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{az eseménynek megfelelő halmaz térfogata}}{\text{az egész eseménytér térfogata}}$$

Feladatok:

16. Mi a valószínűsége, hogy éjszaka álmomból felriadva a nagymutató az óralap képzeletbeli függőlges középvonalához képest jobbra van? És annak a valószínűsége, hogy a körív 5-ös és 6-os számjegy közötti $\frac{1}{12}$ részén van?
17. A mozigép egy film közepén elromlott, és szerencsétlen módon a szalagtovábbító elszakította a filmszalagot (a szakadás merőleges lett a szalag haladási irányára). Egy képkocka $20mm$ hosszú és a képkockák között $2mm$-es felhasználatlan csík van. Mi a valószínűsége, hogy a masina egy képkockába szakított bele?

18. Egy szabályos háromszögbe kört rajzolunk, mely érinti a háromszög oldalait. A háromszög belsejében egyenletes eloszlás szerint választunk egy pontot. Mi a valószínűsége, hogy a pont a kör belsejébe esik?

19. Mi a valószínűsége, hogy a (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) pontok által meghatározott négyzetben egyenletesen választott pont koordinátái közül

    a) az első koordináta legfeljebb kétszerese a másiknak?

    b) az első koordináta négyzete kisebb a második koordinátától?

20. Egy véletlen téglalapot úgy szerkesztünk, hogy mindkét oldalának hosszát egymástól függetlenül 0 és 1 között egyenletes eloszlás szerint választjuk. Mi a valószínűsége annak, hogy a téglalap kerülete nagyobb 2 hosszegységnél, és a területe kisebb $\frac{1}{4}$ területegységnél?