Matematika B4
III. gyakorlat

2006. március 2.

1. Diszkrét feladatok

1. Mi a valószínűsége annak, hogy egy háromgyermekes családban a gyerekek mind egyneműek, ha a lányok és a fiúk születési valószínűsége egyaránt $\frac{1}{2}$?
2. Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb legyen az esély arra, hogy legyen köztük fej?
3. Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy polcon 7 db könyvet véletlenszerűen sorba rakunk, akkor egy köztük lévő trilógia kötetei egymás mellé kerülnek?
4. Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a hat szám előjön?

2. Nevezetes eloszlások

1. *Diszkrét egyenletes eloszlás*:
   n érték közül mindegyik ugyanakkora valószínűséggel, vagyis $\frac{1}{n}$ valószínűséggel következik be. Például egy szabályos kockával való dobás értékei: $P(X=1) = P(X=2) = \cdots = P(X=6) = 1/6$
2. *Binomiális eloszlás*:
   Tipikus példa egy pénzdobás sorozatban a fejek száma. Ha n-szer dobtunk fel egy érmét, amely p valószínűséggel fej, akkor annak a valószínűsége, hogy pontosan k db fej van a dobások között:
   $$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$
   Például: Pontosan 3 hatost dobunk 20 dobásból: $P(X=3) = \binom{20}{3}(1/6)^3(5/6)^{17}$
3. *Geometriai eloszlás (optimista)*:
   Hányadik dobásra jön elő az első hatos? $P(X=k) = (5/6)^{k-1}(1/6)$. Általánosabban: optimista p paraméterű geometriai eloszlású az a valószínűségi változó, ami a siker első előfordulásáig szükséges kísérletek számát számolja (a sikeres kísérlettel együtt), ahol a független kísérletekben a siker valószínűsge p:
   $P(X=k) = (1-p)^{k-1}p$.
4. *Geometriai eloszlás (pesszimista)*:
   Hányat dobok az első hatos dobás előtt? $P(X=k) = (5/6)^k(1/6)$. Általánosabban: pesszimista p paraméterű geometriai eloszlású az a valószínűségi változó, ami az első sikerig bekövetkezett kudarcokat számolja, ahol a független kísérletekben a siker valószínűsge p: $P(X=k) = (1-p)^k p$.

5. *Hipergeometrikus eloszlás*:
A piros, és B fehér golyó közül húzunk n darabot. Annak a valószínűsége, hogy pontosan k db piros golyót húzzunk ki:

$$P(X = k) = h_{A,B,n}(k) = \frac{\binom{A}{k}\binom{B}{n-k}}{\binom{A+B}{n}}$$

Például: A 2 találat valószínűsége az ötös lottón: $P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$

Feladatok:

5. Szabályos érmével (a fej és írás valószínűsége egyaránt $1/2$) az első fejig dobunk. Mi a valószínűsége, hogy
   a) pontosan 4-szer dobunk (azaz negyedikre jön ki először a fej)?
   b) a dobások száma páros?
   c) a dobások száma 5-nél több?
   d) a dobások száma 105-nél kevesebb?
   e) a dobások száma 5 és 10 közé esik?
6. Egy (szabálytalan, hamis) pénzérmét dobunk fel annyiszor, amíg fejet nem kapunk. Ha a fej dobás valószínűsége p, akkor mennyi a valószínűsége, hogy
   a) pont k-szor dobunk a fej előtt?
   b) pont k-szor dobunk az érmével?
7. 100 kulcs közül csak 1 nyitja az előttünk lévő ajtót. A sötétben nem látjuk, hogy melyik kulcsot próbáltuk már ki, így a próbálgatások során többször is a kezünkbe kerülhet ugyanaz kulcs. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozással ki nyitjuk az ajtót? És ha a kipróbált kulcsokat félretesszük?
8. Pisti nem tanult semmit a vizsgára, ahol 10 darab eldöntendő kérdésre kell válaszolnia. Az anyagból valami kicsi dereng, ezért kicsit több, mint 50%-os, mondjuk olyan 60%-os valószínűséggel ír jó választ egy-egy kérdésre. Milyen valószínűségg el megy át, ha a ketteshez 8 jó válasz kell?
9. Egy rozsomák elindul a számegyenes origójából. Minden lépésnél 1/2 valószínűséggel jobbra, 1/2 valószínűséggel balra lép. 20 lépés megtétele után
   a) milyen valószínűséggel lesz a 0-ban?
   b) milyen valószínűséggel lesz az 1-ben?
   c) milyen valószínűséggel lesz a (-2)-ben, ha az utolsó előtti lépés után a (-3)-ban volt?
10. Egy ládában van 5 piros és 10 fehér golyó. Visszatevéssel húzunk 7-szer. Mi a valószínűsége, hogy
   a) legalább egy fehéret húzunk?
   b) pontosan 3 pirosat húzunk?

   Válaszoljuk meg a fenti kérdéseket úgy is, ha minden egyes húzás után nem tesszük vissza a kihúzott golyót.

3. Eloszlás- és sűrűségfüggvény

Az eloszlásfüggvény x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó mekkora valószínűséggel vesz fel az x számnál kisebb értéket:

$F(x) = P(X < x)$

A félév során olyan feladatokkal fogunk foglalkozni, ahol ez a függvény véges sok hely kivételével deriválható. Ekkor jelöljük a deriváltját $f(x) = F'(x)$-szel. $f(x)$-et sűrűségfüggvénynek hívjuk.

Tetszőleges (a, b) intervallumba esés valószínűsége, felhasználva, hogy $F(x)$ vagy $f(x)$ függvény ismert:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

11. Egyenletesen választunk egy pontot a egységsugarú félköríven, majd az így kapott pontot levetítjük az átmérőre. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott szám

    a) kisebb, mint 0?
    b) 0 és $1/2$ között van?
    c) -1 és $1/2$ között van?
    d) -1 és x között van (x tetszőleges -1-nél nagyobb szám)? Jelöljük ezt a valószínűséget $F(x)$-vel, és $F(x)$ segítségével fejezzük ki a többi megoldást!
    e) Mi $P(a < X < b)/(b - a)$ határértéke, ha a tart 0-hoz alulról, b tart 0-hoz felülről? Milyen kapcsolatban van ez $F(x)$-szel?
    f) Számoljuk ki $f(x)$-et ($F(x)$ deriváltja), és ábárázoljuk mindkét függvényt.

    (Az így kapott eloszlás az Arcussinus-eloszlás)

12. Egyenletesen választunk egy félköríven egy pontot, vagyis egy adott ívhosszba esés valószínűsége arányos az ívhosszal. Az így kapott pontot a középpontból kivetítjük a félkör átmérőjével párhuzamos érintőre, amely egy számegyenes, ahol az érintési pont a 0, és a skálázása megegyezik a félkörével. Mi annak a valószínűsége, hogy a kivetített pont a

    a) $(-\infty, 0)$ intervallumba esik?
    b) $(0, 2)$ intervallumba esik?
    c) $(-2.5, 1.5)$ intervallumba esik?
    d) $(-\infty, x)$ intervallumba esik? Ezt a valószínűséget jelöljük $F(x)$-vel, és $F(x)$ segítségével fejezzük ki a többi megoldást!
    e) $F(x)$ ismeretében számoljuk ki $f(x)$-et is, és ábárázoljuk mindkét függvényt.

    (Az így kapott eloszlás a Cauchy eloszlás)

13. Mi a valószínűsége, hogy ha a $(0, 1)$ intervallumon egymástól függetlenül, egyenletes eloszlás szerint kiválasztunk

    a) 2 pontot, akkor a kisebbik pont kisebb x-nél?
    b) 3 pontot, akkor a legkisebbik pont kisebb x-nél?
    c) 3 pontot, akkor a legnagyobbik pont kisebb x-nél?
    d) 3 pontot, akkor az elhelyezkedésük szerint a második legkisebb pont kisebb x-nél?

    A fenti feladatokban tulajdonképpen $F(x)$-et számoltuk ki. Egyik esetben számoljuk ki $f(x)$-et is, és ábárázoljuk mindkét függvényt.

14. Mi a valószínűsége, hogy ha az $(1, 5)$ intervallumon kiválasztunk 2 pontot, akkor az elhelyezkedésük szerint a kisebbik pont kisebb x-nél? Mi lesz a sűrűségfüggvény?

15. Egy tüzérségi lövedék a célterületet egy r sugarú körön belül éri el. A körön bármely területre érkezés valószínűsége arányos az adott terület mérőszámával.Az X valószínűségi változó jelentse a becsapódás pontjának távolságát a célterület középpontjától. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lövedék az $r/2$ ill $3r/4$ sugarakkal határolt körgyűrű belsejébe esik? Mi a valószínűsége, hogy $X < r/2$? Mi a valószínűsége, hogy $X < x$? Mi lesz a sűrűségfüggvény?

16. Vegyünk $(0, 1)$ intervallumon egymástól függetlenül két pontot egyenletes eloszlással. Jelöljük ezeket RND_1-gyel és RND_2-vel. Mi a valószínűsége, hogy

    a) $RND_2/RND_1 < 0.5$?
    b) $RND_2/RND_1 < 1$?
    c) $RND_2/RND_1 < 2$?
    d) $RND_2/RND_1 < z$?

    Oldjuk meg a fenti feladatokat $RND_1 \cdot RND_2$-vel, $RND_1 + RND_2$-vel, $RND_1 - RND_2$-vel.

17. Vegyünk $(0, 1)$-en egyenletes eloszlás szerint egy X pontot. Mi lesz X

    a) négyzetének eloszlása?
    b) köbének eloszlása?
    c) gyökének eloszlása?

    Megjegyzés: A feladat az, hogy vagy az eloszlásfüggvényt ($F(x)$), vagy a sűrűségfüggvényt adjuk meg ($f(x)$). Ezek meghatározzák az eloszlást.