Matematika B4
IV. gyakorlat

2006. március 9.

1. Eloszlás- és sűrűségfüggvény

Ha az X egy folytonos valószínűségi változó, akkor X-et jól jellemzi az eloszlás- illetve a sűrűségfüggvénye (azaz ha meg akarunk mindent mondani X-ről, akkor elég ezek valamelyikét kiszámolni).
Az **eloszlásfüggvény** jellemzői: Az eloszlásfüggvény x pontban felvett értéke megadja, hogy az X valószínűségi változó mekkora valószínűséggel vesz fel az x számnál kisebb értéket:

$$F(x) = P(X < x)$$

Egy folytonos eloszlás eloszlásfüggvényére mindig teljesül:

1. a $(-\infty)$-ben 0-hoz, a ∞-ban 1-hez tart
2. monoton növekvő (nem feltétlenül szigorúan!) vagyis ha $x_1 < x_2$, akkor $F(x_1) \leq F(x_2)$
3. mindenhol folytonos

Fordítva is igaz: az ezeket a tulajdonságokat teljesítő függvények mindegyike egy folytonos eloszlás eloszlásfüggvénye.

Diszkrét esetben az eloszlásfüggvény "lépcsős".

Általában eloszlásfüggvényekkel szoktunk számolni, de előfordul, hogy **túlélési függvénnyel** könnyebb kifejezni valamit: $T(x) = P(X \geq x)$. Nyilván $F(x) + T(x) = 1$ minden x-re.

A **sűrűségfüggvény** tulajdonságai:

1. $f(x) \geq 0$ minden x-re
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Fordítva is igaz: az ezeket a tulajdonságokat teljesítő függvények mindegyike egy folytonos eloszlás sűrűségfüggvénye.

Minden x-re $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dx$ ezért $F'(x) = f(x)$ minden olyan x-re, ahol $F(x)$ deriválható. Igaz továbbá, hogy $f(x) = \lim_{a \to x-, b \to x+} \frac{P(a<X<b)}{b-a}$

Feladatok

1. Ellenőrizzük, hogy az alábbi függvények eloszlásfüggvények-e (ahol a függvény nincs megadva, ott automatikusan 0)! Adjuk meg a túlélési függvényt és a sűrűségfüggvényt is! Ábrázoljuk őket!

a)

$$F(x) = 1 - e^{-x} \quad \text{ha} \quad 0 < x$$

b)

$$F(x) = 1 - e^{-2.5x} \quad \text{ha} \quad 0 < x$$

c)

$$F(x) = 1 - \frac{2}{x+1} \quad \text{ha} \quad x \geq 1$$

d)

$$F(x) = 1 - e^{-x-1} \quad \text{ha} \quad x \geq -1$$

e)

$$F(x) = \frac{x}{10} \quad \text{ha} \quad 0 < x \leq 10 \quad \text{és} \quad 1 \quad \text{ha} \quad x > 10$$

f)

$$F(x) = \frac{x-6}{2} \quad \text{ha} \quad 6 < x \leq 8 \quad \text{és} \quad 1 \quad \text{ha} \quad x > 8$$

2. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény (amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0) ? Írjuk fel az eloszlás és túlélési függvényt is, és ábrázoljuk ezeket.

a)

$$h(x) = \frac{1}{3} \quad \text{ha } 2 \leq x \leq 5$$

b)

$$i(x) = 2e^{-2x} \quad \text{ha} \quad x > 0$$

c)

$$j(x) = 2x \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1$$

d)

$$f(x) = \frac{2}{x} \quad \text{ha} \quad x > 1$$

e)

$$g(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{ha} \quad 0 < x < 2$$

2. Valószínűségi változók generálása RND segítségével

Ha az $F(x)$ eloszlásfüggvény inverze $F^{-1}(y)$, akkor $F^{-1}(RND)$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$. Ezt felhasználva generálhatunk tetszőleges folytonos eloszlású valószínűségi változót egy egyszerű zsebszámológép segítségével! Megadott diszkrét eloszláshoz pedig könnyű olyan lépcsős t függvényt értelmezni, hogy $t(RND)$ eloszlása a megadott eloszlás legyen.

3. Várható érték

Az X valószínűségi változó **várható értéke**:
folytonos esetben: $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dt$
diszkrét esetben: $E(X) = \sum\limits_{x} x \cdot p(x)$
és tetszőleges t(X) függvényének várható értéke (hasonlóan a diszkrét esetben tanultakhoz képzeletben x-t cseréljük ki $t(x)$-ra):
folytonos esetben: $E(t(X)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t(x)f(x)dx$
diszkrét esetben: $E(t(X)) = \sum\limits_{x} t(x)p(x)$

4. Exponenciális eloszlás

λ paraméterű exponenciális sűrűségfüggvénye: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ha $x > 0$, egyébként 0, eloszlásfüggvénye: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ ha $x > 0$, egyébként 0.

Megjegyzés: Az eloszlásra gondolhatunk úgy, mintha kis h időközönként vizsgálunk egy "örökifjú" tulajdonságú alkatrész élettartalmát, ami kis h esetén körülbelül λh valószínűséggel romlik el h időtartam alatt. Így egy diszkrét eloszláshoz jutunk. Ha h-val tartatunk 0-hoz, akkor a diszkrét eloszlás eloszlásfüggvénye közelíti a λ paraméterű exponenciális eloszlás eloszlásfüggvényét.

A λ paraméterű exponenciális eloszlás várható értéke: $1/\lambda$. Tehát ha egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke adott, akkor a paramétere a várható érték reciproka.

Feladatok:

3. Adott egy "örökifjú" tulajdonáságú alkatrész, amely exponenciális eloszlást követ 12 óra várható értékkel. Ha az élettartalmát olyan digitális órával mérjük, ami

   a) percenként
   b) másodpercenként

   ugrik, akkor a mért élettartam diszkrét eloszlást követ. Határozzuk meg ezeket az eloszlásokat!

4. Egy utcai telefonfülke foglalt, amikor odaérek. A beszélgetés hossza véletlen, percekben mérve $\frac{1}{3}$ paraméterű exponenciális eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy 5 perc múlva sem kerülök sorra?

5. Adott típusú elektromos berendezések 2%-a 1000 üzemórán belül elromlik. Tegyük fel, hogy a meghibásodásig eltelt idő exponenciális eloszlást követ. Mekkora a valószínűsége, hogy egy ilyen berendezés az átlagosnál tovább működik?

6. Egy örökifjú tulajdonságú villanykörténél $\frac{2}{3}$ annak a valószínűsége, hogy 2000 óránál többet üzemel. Egy városban 200 ilyen égőt helyezünk el. Mi a valószínűsége annak, hogy 200 óra elteltével éppen 150 égő világít?

7. RND egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0, 1]$ intervallumon. Keressünk alkalmas t függvényt, hogy $X = t(RND)$

   a) 2 paraméterű exponenciális eloszlású legyen.
   b) $x \in [10, 30]$-on egyenletes eloszlású legyen.

8. A zsebszámológép RND gombja és egy transzformáció segítségével generáljunk három $CAUCHY$ eloszlású pontot. (Segítségül a $CAUCHY$ eloszlás eloszlásfüggvénye: $\frac{1}{2} + \frac{ArcTan(x)}{\pi}$)

9. Diszkrét eloszlás generálása RND segítségével.

   a) Generáljunk kockadobást!

b) Addig dobok fel egy szabályos érmét, amíg fejet nem kapok. A dobások számát jelöljük X-szel. Érme feldobása nélkül végezzünk kísérleteket (minden kísérlethez 1 db RND-t használhatunk).

c) 3-szor dobunk kockával, és megszámoljuk, hogy a dobások során hány hatos fordult elő. A kocka feldobása nélkül számológéppel generáljunk kísérleteket.

10. Mi a következő eloszlások, illetve valószínűségi változók várható értéke:

   a) $(3, 11)$-en folytonos egyenletes eloszlás.
   b) $(0, 1)$-en két függetlenül vett egyenletes eloszlású pont közül a nagyobbik eloszlása.
   c) $(0, 1)$-en három függetlenül vett egyenletes eloszlású pont közül a legnagyobbik eloszlása.
   d) $(0, 1)$-en öt függetlenül vett egyenletes eloszlású pont közül a második legnagyobbik eloszlása.
   e) Arcsin eloszlás (emlékeztetőnek: origó középpontú egységnyi sugarú félköríven vett egyenletes eloszlást levetítünk a számegyenesre).
   f) $\sqrt{RND}$
   g) RND^2
   h) RND^n

11. A [0,1] intervallumon egyenletes eloszlással és egymástól függetlenül kijelölünk 4 pontot. Mi a nagyság szerinti 3. pont eloszlásfüggvénye? És a sűrűségfüggvénye? Várható értéke?

12. Mi a következő diszkrét eloszlások várható éréke:

   a) 10-ed rendű $1/6$ paraméterű binomiális eloszlás.
   b) $1/6$ paraméterű geometriai eloszlás, azaz hányadikra jön ki az első hatos.
   c) Számoljuk ki az n-edrendű p paraméterű binomiális eloszlás várható értékét!
   d) Számoljuk ki a p paraméterű (optimista) geometriai eloszlás várható értékét!
   e) Addig dobok, amíg másodszorra fejet nem kapok. Mi lesz a dobásaim számának várható értéke?
   f) A második 6-osig dobok. Mennyi lesz a dobásaim számának várható értéke?

13. Vegyünk egy $(0, 5)$-ön egyenletes eloszlás szerint egy számot, majd emeljük négyzetre. Mennyi lesz az így kapott szám várható értéke?

14. Számoljuk ki a λ paraméterű exponenciális eloszlás esetén X^2 várható értékét!

15. Adott $f(x)$ sűrűségfüggvény mellett milyen c értékre lesz

   a) $\int (x-c)^2 f(x)dx$
   b) $\int |x-c| f(x)dx$

   minimális?

5. Sűrűségfüggvény a síkon

Sűrűségfüggvény tulajdonságai:

1. $f(x, y) \geq 0$, minden x, y valós számra.
2.
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1$$

Az A tartományba esés valószínűsége:

$$P(A) = \iint\limits_{A} f(x,y)dxdy$$

Az (X,Y) valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvényének számolásához a következő összefüggést használjuk fel:

$$f(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P(X \in (x, x+\Delta x), Y \in (y, y+\Delta x))}{\Delta x \cdot \Delta x}$$

Rászűkítünk az (x,y) pontra egy téglalappal, és a határértékben kapott érték lesz a sűrűségfüggvény értéke az x, y helyen.

6. 2-dimenziós valószínűségi változó függvényének várható értéke

A t(X,Y) valószínűségi változó várható értéke:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t(x,y) \cdot f(x,y)dxdy$$

Például X és Y szorzatának várható értéke:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)dxdy$$

Feladatok:

16. Az alábbi függvények melyike sűrűségfüggvény? (amelyik tartomány nincs megadva, ott a függvény 0.)

    a)
    $$f(x,y) = \frac{4}{5}(x + xy + y) \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

    b)
    $$f(x,y) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \quad , \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad y > 0$$

    c)
    $$f(x,y) = 4xy - 10 \quad , \quad \text{ha} \quad x^2 + y^2 < 1$$

    d)
    $$f(x,y) = \frac{1}{x} \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < y < x < 1$$

17. Legyen RND_1 és RND_2 független $(0,1)$-en folytonos eloszlású valószínűségi változók. Írjuk fel

    a) (RND_1, RND_2)
    b) $({RND_1}^2, {RND_2}^2)$
    c) $({RND_1}^3, \sqrt{RND_2})$

    sűrűségfüggvényét!

18. Vegyük az előző feladat b.) részében megadott $f(x) = \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}$ függvényt. Számítsuk ki az alábbi események valószínűségét:

    a) $0 < X < 1$ és $0 < Y < 1$
    b) $1 < X < 5$ és $2 < Y < 8$
    c) $0 < X < 1$
    d) $3 < Y < 5$

19. Határozzuk meg c-t úgy, hogy f(x,y) sűrűségfüggvény legyen:

$$f(x,y) = cy \quad , \quad \text{ha} \quad x > 0, \quad y > 0, \quad x + y < 1$$

20. Vegyük az alábbi sűrűségfüggvényt:

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y}} \quad , \quad \text{ha} \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < x^2.$$

    a) Igazoljuk, hogy ez valóban sűrűségfüggvény!
    b) $P(X + Y < 1) =?$
    c) $P(X < x) =?$
    d) $P(Y < y) =?$