Matematika B4
VI. gyakorlat

2006. március 23.

1. Független események

Jelölés: az "A és B" eseményt ezentúl AB-vel jelöljük.

A, B események függetlenek akkor és csak akkor, ha teljesül, hogy $P(AB) = P(A)P(B)$.
Több esemény függetlensége esetén nem csak annak kell teljesülnie, hogy

$$P(A_1A_2A_3 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\dots P(A_n)$$

hanem tetszőleges A_i-k helyett mindkét oldalon azok komplementerét véve is igaz az egyenlőség, például:

$$P(\overline{A_1}\ A_2\ \overline{A_3}\ \overline{A_4} \dots A_n) = P(\overline{A_1})P(A_2)P(\overline{A_3})P(\overline{A_4})\dots P(A_n)$$

Ilyen egyenletből 2^n darab van. Fordítva is igaz: ha az összes így származtatott egyenlet fennáll, akkor az $A_1, A_2, \dots A_n$ eseményekről azt mondjuk, hogy együttesen függetlenek.
A feladatsorban szereplő nevezetes eloszlásokról a 3. gyakorlati anyagban található összefoglaló.

Feladatok

1. Kétszer egymás után feldobunk egy szabályos pénzérmét. Legyen A az az esemény, hogy elsőre fejet dobunk, B az az esemény, hogy másodikra dobunk fejet, C pedig, hogy a dobások egyezőek. Győződjünk meg róla, hogy A, B, C eseményekből bármely kettő független egymástól, de a 3 esemény együttesen már nem alkot független rendszert!

2. Egy piros és egy zöld kockával dobunk. Tekintsük az alábbi eseményeket: $A =$ a dobott számok összege 7 , $B =$ legalább az egyik kockán van hatos , $C =$ mindkét kockával páratlant dobok , $D =$ a két kockával különböző számokat dobok , $E =$ a zöld kockával 4-est dobok .
Válaszoljuk meg a következő kérdéseket:

   a) Függetlenek-e egymástól az A és C események?
   b) Kizáróak-e az A és C események?
   c) Mennyi a B esemény valószínűsége?
   d) Hogy viszonul egymáshoz A és D? Milyen következtetést vonhatunk le ebből a valószínűségeikre nézve? És a függetlenségekre nézve?
   e) Függetlenek-e egymástól az A és E események?
   f) Mindezek alapján mutassunk példát olyan eseményekre, amelyek
      i. függetlenek, de nem kizáróak,
      ii. kizáróak, de nem függetlenek.

3. Feldobunk egy kockát n-szer. Mi a valószínűsége, hogy

a) pontosan 1 hatos lesz?
b) pontosan 2 hatos lesz?
c) pontosan k hatos lesz?

Adjuk meg a várható értéket, a szórást és a móduszt is.

4. Kockával dobunk az első hatosig. Jelöljük X-szel a dobások számát. Mi X eloszlása? Mennyi a várható értéke?

5. Érmével dobunk a második fejig. Mi a valószínűsége, hogy

   a) ehhez két dobás elég lesz?
   b) pontosan 3-szor fogunk dobni?
   c) pontosan 4-szor fogunk dobni?
   d) pontosan k dobást fogunk végezni?

   Mennyi lesz az így kapott eloszlás várható értéke?

6. Kockával dobunk a harmadik 6-osig. Mi a valószínűsége, hogy

   a) ehhez három dobás elég?
   b) pontosan 4-szer fogunk dobni?
   c) pontosan k dobást fogunk végezni?

   Mennyi lesz az így kapott eloszlás várható értéke? És a módusz?

7. Egy szabálytalan érmével (p valószínűséggel fej, $q = 1 - p$ valószínűséggel írás) dobunk az r-edik fejig. Mi a valószínűsége, hogy

   a) ehhez r dobás elég?
   b) pontosan $r + 1$-szer fogunk dobni?
   c) pontosan $r + 2$-ször fogunk dobni?
   d) pontosan k-szor fogunk dobni?
   A kapott eloszlás neve: r-edrendű p paraméterű (optimista) negatív binomiális eloszlás.
   e) Melyik dobás-szám a legvalószínűbb, ha az r-edik fejig k-szor dobunk írást? Az így kapott eloszlást nevezzük r-edrendű p paraméterű pesszimista negatív binomiális eloszlás

8. 100 kulcs közül 2 nyitja az előttünk lévő ajtót. A kipróbált kulcsokat félretesszük. Mi a valószínűsége, hogy legfeljebb 50 próbálkozásból bejutunk? És mi a valószínűsége, hogy pontosan n próbálkozásból jutunk be?

9. Dobogatok a kockával és vonásal számolom, hogy hány hatost dobtam. Mi a valószínűsége, hogy a 12. dobásra húzom a harmadik vonást? Ha azt számolnám ki, hogy mennyi a valószínűsége, hogy 12-szer dobok hatostól különbözőt, mire kidobom a harmadik hatost, akkor az az előző eredménytől különbözne?

10. Egy 30 fős osztályban 17 lány van. Véletlenszerűen kiválasztanak az osztályból egy 12 fős csapatot, egy vetélkedőre. Legyen a csapatba került lányok száma X. $P(X = 7) =$? Melyik érték lesz a legvalószínűbb (azaz a módusz)?

11. 80 üveg bor van egy borospincében össze-vissza ebből 30 fehér. A vendégek a fogadóstól 3 üveg fehér és 7 vörösbort rendelnek, de pincében kiégett a villany. A fogadós véletlenszerűen kiválaszt 10 üveget. Mi a valószínűsége, hogy minden vedég kap neki megfelelő itókát?

12. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 23 fős osztályban van két ember, akik az év ugyanazon napján születtek? (Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy minden év 365 napos.)

13. Egy osztályban 22 tanuló van. Egy órára 8-an nem készültek, és 7-en felelnek. Adjuk meg a készületlen felelők számának eloszlását! Mennyi a valószínűsége, hogy pontosan 2 készületlen felelő lesz?

14. Egy gyárban futószalag szállítja az alkatrészeket. A futószalag leáll, ha selejtes termék érkezik. A termékek 2%-a selejtes. Mi az eloszlása annak a valószínűségi változónak, ami azt számolja, hogy

    a) hányszor állt le a szalag az n-edik termékig (őt is beleértve)?
    b) hány terméket gyártott a gép az n-edik leállásig?
    c) hány terméket szállított két leállás között?
    d) hány leállás történt egymás után anélkül, hogy egyetlen jó termék is keletkezett volna? (Selejtszéria hossza)

15. Egy dobozban N darab cédula van 1-től N-ig megszámozva. Visszatevés nélkül húzunk n-szer, majd a kihúzott számokat nagyság szerint sorba rakjuk. Tekintsük a nagyság szerinti

    a) legkisebbet
    b) legnagyobbat
    c) 2 -ik legkisebbet
    d) 3 -ik legkisebbet
    e) s-edig legkisebbet.

    Határozza meg ezeknek a valószínűségi változóknak az eloszlását: adja meg a súlyfüggvénynek és az eloszlásfüggvénynek is a képletét! Határozza meg az eloszlás móduszát!

16. Egy dobozban található 30 db piros, 20 db fehér és 10 db zöld golyó. Kihúzunk 5 golyót. Jelöljük a kihúzott piros golyók számát X-szel, a fehér golyókét Y-nal, a zöldekét Z-vel.

    a) A golyókat minden egyes húzás után visszatesszük. Válaszoljuk meg a következő kérdéseket:
       $P(X = 3)$
       $P(Y = 1)$
       $P(X = 3, Y = 1)$
       $P(X = 3, Y = 1, Z = 1)$
       $P(X = 2, Y = 2, Z = 2)$
       $P(X = 0, Y = 2, Z = 3)$
    b) Válaszoljuk meg a fenti kérdéseket úgy is, hogy a golyókat visszatevéssel húzzuk.

17. Oldjuk meg az előző feladatot tetszőleges számú színre és tetszőleges számú golyókra!