Matematika B4
VII. gyakorlat

2006. március 30.

1. Poisson eloszlás

Ha az X valószínűségi változó a $0, 1, 2, \ldots$ értékeket veheti fel és

$$P(X = k) = p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ahol $\lambda > 0$ egy tetszőleges valós szám, akkor X eloszlását λ paraméterű Poisson-eloszlásnak nevezzük. Várható értéke λ.

Feladatok:

1. Egy kollégiumban egy év alatt 0.1%-os valószínűséggel üt ki tűz. Mennyi a valószínűsége, hogy 5 év alatt legalább 1 tűzeset van? (Számoljuk ki az eddig tanult módszerekkel, és a Poisson eloszlás segítségével is!)

2. Feltéve, hogy a balkezesek aránya átlagosan 1%, becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 200 véletlenszerűen kiválasztott ember között legalább négy balkezes van.

3. Sok év statisztikája áll rendelkezésünkre arra nézve, hogy naponta hány lakástűz volt Budapesten. A napi négyes gyakoriság ugyanolyan valószínűséggel fordul elő, mint az ötös gyakoriság. Becsülje meg, hogy a napok körülbelül hány százalékában fordul elő a kettes gyakoriság.

4. Átlagosan hány szem mazsolának kell lennie egy sütiben ahhoz, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott sütiben 99%-os valószínűséggel legyen (legalább egy szem) mazsola?

5. Egy 400 oldalas könyvben összesen 200 sajtóhuba van (véletlenszerűen elszórva). Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 13. oldalon több, mint egy sajtóhuba van?

6. Háromszor olyan valószínű, hogy egy évben két ember öli magát a Dunába, mint az, hogy 5.

   a) Mire tippel, hány ember öli magát a Dunába egy évben?
   b) Mi a valószínűsége, hogy senki nem lesz így öngyilkos?
   c) Átlagosan hány ember választja az öngyilkosságnak ezt a módját?

7. Mennyi annak a valószínusége, hogy ha 4 000 000 lottószelvényt véletlenszerűen és egymástól függetlenül kitöltenek, ezek között pontosan k db öttalálatos szelvény lesz?

8. A kocogj velünk mozgalom keretében tavaly futóversenyt rendeztek a Duna-kanyarban. A pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban egy, 75-en pedig két kullancsot. Ennek alapján becsüljük meg, hogy kürölbelül hányan indultak a versenyen.

9. Egy forgalmas országútszakaszon, ahol egyébként is szoktak radarozni, figyelik, hogy 5 perc alatt hány autó lépi át a megengedett sebességhatárt. Tudjuk, hogy valószínűbb, hogy lesz ilyen autó, mint az, hogy nemlesz. Adjon becslést (lehetőleg élest) annak a valószínűségére, hogy pontosan három autó lépi át a megengedett sebességhatárt.

2. Poisson-folyamat

Kiállok a Petőfi hídhoz egy másodpercekben beskálázott számegyenessel és egy stopper órával. Az órát elindítom, majd ha egy piros autót látok elhaladni, akkor a számegyenesen az eltelt időnek megfelelő helyre teszek egy pontot. Így Poisson-folyamatot kapunk, amelynek van egy λ paramétere, és a következők igazak:

1. Rögzített időintervallumba eső pontok száma Poisson-eloszlást követ $\lambda \cdot (\text{intervallum hossza})$ paraméterrel.
2. Diszjunkt időintervallumban történt események függetlenek.

Megjegyzés: A Poisson-folyamatnak nincs eloszlásfüggvénye, nem valószínűségi változó! Ez véletlen pontoknak sorozata.

Szomszédos pontok közötti távolságok független, λ paraméterű exponenciális eloszlást követő valószínűségi változók (ahol ez a λ az előzővel megegyező). Azaz ha valaki λ paraméterű exponenciális eloszlás szerinti távolságokban rak le egymás után pontokat a számegyenesre, akkor is Poisson-folyamatot kapunk.

Feladatok:

10. Tekintsünk egy Poisson-folyamatot. Számoljuk ki egy t hosszú intervallumba eső autók számának a várható értékét? (Megjegyzés: az eredményből érthető, hogy miért szokták a λ paramétert *intenzitás*nak nevezni.)
11. Tekintsünk egy $\lambda = 2.3$ paraméterű Poisson-folyamatot. Jelöljük $X_{(a;b)}$-vel az $(a;b)$ intervallumba eső pontok számát. Válaszoljuk meg a következő kérdéseket:

    a) $P(X_{(0;3)} = 4) =?$
    b) $P(X_{(1;3)} = 2) =?$
    c) $P(X_{(4;6)} = 2) =?$
    d) $P(X_{(1;7)} < 2) =?$
    e) $P(X_{(2;3.2)} \geq 2) =?$
    f) $P(X_{(2;6.5)} < 2 \text{ és } X_{(7;8)} = 3) =?$
    g) $P(X_{(1;3)} = 3 \text{ és } X_{(2;4)} = 2) =?$

3. Gamma eloszlás

Poisson-folyamatban az n-edik pont helyének eloszlásfüggvénye:

$$1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^i x^i}{i!} e^{-\lambda x} \quad \text{ha } x > 0$$

sűrűségfüggvénye:

$$\frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \quad \text{ha } x > 0$$

Feladatok:

12. Éjszaka bárányok helyett az ablakom alatt elhaladó kocsikat számolom. Átlagosan 3 perc telik el két autó elhaladása között. Mi a valószínűsége, hogy 6 perc alatt 3 kocsi hangját is hallom?
13. Egy északi sarki téli tábor irodájában kell, hogy folyamatosan világosság legyen. Az izzók, amiket használnak exponenciális eloszlásúak 10 óra várható értékkel. Legalább hány ilyen izzóra van szükség ahhoz, hogy a 60 napra tervezett táborban legalább 0,9 valószínűséggel folyamatosan éghessen a villany? (Az izzócserék időtartama elhanyagolható.)
14. Keressük meg, hogy az n, λ paraméterű Gamma eloszlás sűrűségfüggvényének hol van a maximuma!
15. Fejezzük ki a Gamma eloszlás várható értékét n és λ segítségével (segítség: kis n-re könnyű, számoljunk konkrét értékre először)!
16. Számoljuk ki az n, λ paraméterű Gamma eloszlás szórását!