

Matematika A4

I. gyakorlat

Vetier András kurzusa

2006. szeptember 14.

1. Bevezető kérdések

1. Négyyszer dobunk érmével és megfigyeljük mindegyik érmén, hogy melyik oldal van felül. Írjuk fel az eseményteret!
2. Addig dobunk érmével, amíg másodszorra fejet nem kapunk. Írjuk fel az eseményteret!
3. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy piros és egy zöld kockával két 2-est dobok? És ugyanez két zölddel?
4. Mi a valószínűsége annak, hogy 10 dobásból legalább egy 6-os?

2. Kombinatorikus leszámolások

| | ismétlés nélküli | ismétléses |
|------------|---|--|
| permutáció | $n!$ n futó beérkezésének sorrendje | $\frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_r!}$ n golyót ennyi féle képpen állíthatunk sorba, ha k_1, k_2, \dots, k_r db külön-külön egyszínű |
| variáció | $\frac{n!}{(n-k)!}$ n futó beérkezésének sorrendje ha csak az első k helyet tekintjük | l^k l darab betűből készíthető k hosszú szavak száma |
| kombináció | $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ n golyóból kiválasztunk k darabot és nem számít a kiválasztás sorrendje | $\binom{k+l-1}{l}$ k féle sütiből (sok van belőlük) hazaviszünk l -et, ennyi féleképpen tehetjük meg |

5. A hét törpe minden este más sorrendben szeretne sorba állni, amikor Hófehérke a vacsorát osztja. Hányféleképpen tehetik ezt meg?
6. Hányféle sorrendben rakhatók ki a MATEMATIKA szó betűi?
7. Egy versenyen 5-en indulnak, az újságok az első három helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista? (Közlik a helyezést is.)
8. Egy fagyizóban 5 féle fagyalt kapható: vanília, csoki, málna, pisztácia és citrom. Hányféleképpen vehetünk 2 gombócot, ha számít a gombócok sorrendje is, és lehet 1 fajtaból többet is venni?
9. Van 6 lányismerősöm, és 2-t el akarok hívni moziba. Hányféleképpen tehetem ezt meg?
10. 3 új tanárt és egy titkárnőt akarnak felvenni egy iskolában. 6 tanár és 3 titkárnő jelölt van. Hányféleképpen kerülhetnek ki közülük az iskola új dolgozói?
11. Egy számkombinációs zárát 3 db különböző, 1 és 10 közötti szám begépelésével lehet kinyitni, de tudjuk, hogy a számok növekvő sorrendben vannak. Hány ilyen kombináció van?

12. Rendezgetem a gémkapocgyűjteményemet. Van egy barna, egy szürke, és egy fehér. Hányféleképpen rakhatom őket sorba? És ha 7 különböző lenne?
13. Egy érmét tízszer feldobunk egymás után. Hányféle dobássorozat van, amelyben 6 fej és 4 írás fordul elő?
14. Piros, sárga, zöld, és kék színekből hányféleképpen lehet háromsávós (vízszintes sráfozású) zászlót készíteni, ha minden színt legfeljebb egyszer használhatunk?
15. Hány különböző autórendsám készíthető (ahol három betűt három számjegy követ)? (26 különböző betűt használnak a rendszám készítéshez.)
16. Hány ötöslottó szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen telitalálatosunk? És hatoslottó szelvényt?

3. Valószínűség

Elvégzünk egy kísérletet, például feldobunk egy kockát, amelynek lehetséges eredményeit (adott esetben 1, 2, 3, 4, 5, 6 eseteket) **kimeneteleknek** nevezzük. A kimenetek halmazát (összességét) **eseménytérnek** nevezzük. A kimeneteket mi választjuk meg. Megtehetjük azt is, hogy azt a két lehetőséget nézzük, hogy hatost dobtunk-e, vagy sem. Ilyenkor 2 kimenetel van: 6-os, vagy nem 6-os, az eseménytér egy kételemű halmaz. A kimeneteket, vagy azok függvényét valószínűségi változónak nevezzük, például $X = \text{"kockadobásnál a fölül látható szám"}$ egy valószínűségi változó. Ilyenkor 6 kimenetel van: 1, 2, 3, 4, 5, 6, az eseménytér az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Ha az adott számok négyzetét tekintjük, akkor az $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 4, 3 \rightarrow 9, 4 \rightarrow 16, 5 \rightarrow 25, 6 \rightarrow 36$ függvényre gondolhatunk, amely az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ eseménytérre értelmezett. Ilyenkor tekinthetjük egyből az $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$ eseménytérre is, ezt mi választjuk meg.

Egy kísérletsorozatban az egyes kimenetekhez tartozó relatív gyakoriságok a kísérletek számának növelésével bizonyos értékek körül "ingadoznak" (a kísérletszám növelésével konvergálnak egy-egy elméleti értékhez), ezt az értéket nevezzük az adott kimenetel **valószínűségének**.

A kísérlet elvégzése közben nézhetjük azt, hogy egy adott **esemény** (állítás) bekövetkezik-e. Olyan eseményekkel fogunk foglalkozni, amelyek bekövetkezése egyértelműen eldönthető a kísérlet kimeneteléből. Ha például a kockadobás esetén ha az eseménytér az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, akkor az az esemény, mely szerint párosat dobtunk-e eldönthető a kimenetel ismeretében, míg az, hogy az asztal melyik részén állt meg a kocka, már nem.

Egy esemény valószínűségének elméleti kiszámolásához csak egy egyszerű elvet használunk fel: ha a kimenetek egyformán valószínűnek tekinthetők, akkor egy adott esemény valószínűsége:

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{kedvező kimenetek száma}}{\text{az összes kimenetel száma}}$$

Biztos esemény 1 valószínűségű (pl. a kocka dobásánál mekkora valószínűséggel dobunk pozitív számot), ez "mindig" bekövetkezik.

Lehetetlen esemény valószínűsége: 0.

17. Feldobunk egy érmét kétszer egymásután. Mi a valószínűsége, hogy dobunk fejet? És hogy pontosan 1 db fejet dobunk?
18. Egy csomag magyar kártyából kivesszünk egy lapot, megnézzük a színét, majd visszatesszük. Megkeverjük a paklit, majd megint választunk egy lapot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a két lap színe különböző?
19. Mi a valószínűsége annak, hogy két darab (szabályos) kocka feldobásakor legalább az egyik 6-os lesz? És annak a valószínűsége, hogy egyik sem lesz 6-os?
20. Mi a valószínűsége annak, hogy egy háromgyermekes családban a gyerekek mind egyneműek, ha a lányok és a fiúk születési valószínűsége egyaránt $\frac{1}{2}$?
21. Legalább hány szabályos pénzdarabot kell feldobni ahhoz, hogy 90%-nál nagyobb legyen az esély arra, hogy legyen köztük fej?

22. Mennyi a valószínűsége, hogy ha egy polcon 7 db könyvet véletlenszerűen sorba rakunk, akkor egy köztük lévő trilógia kötetei egymás mellé kerülnek?
23. Hatszor dobunk egy szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy mind a hat szám előjön?
24. A brazil labdarúgó válogatott edzésének megkezdése előtt, az edzésen résztvevő 22 játékost két csoportba osztják. Mi annak a valószínűsége, ha találmra történik a szétosztás a két 11-es csoportba, hogy Ronaldo és Ronaldinho egymás ellen játszik?
25. Mi a valószínűsége annak, hogy egy 23 fős társaságban van legalább két olyan ember, akiknek a születésnapja ugyanarra a napra esik (tegyük fel, hogy az emberek az év 365 napján egyforma eséllyel születnek)?
26. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón pontosan két találatunk lesz?
27. Egy dobozban 6 zöld és 4 sárga golyó van. Kihúzzunk (visszatevés nélkül) 4 golyót csukott szemmel, mennyi a valószínűsége, hogy pontosan két zöld golyót húztunk ki?